14. Grenzwerte von Funktionen

Definition. Wir schreiben $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

und sagen, "der (Funktions-)**Grenzwert** von $f(x)$ für x gegen a ist gleich L", wenn die Werte von $f(x)$ beliebig nahe an L kommen, sofern x genügend nahe an a ist, wobei allerdings stets $x \neq a$ ist.

Weitere Schreibweise: $f(x) \to L$ für $x \to a$

Bemerkung. Dies ist eher eine informelle Definition, und keine streng mathematische!

Dabei können die Fälle auftreten:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- $f(a)$ ist **nicht** definiert.

Es ist auch sinnvoll, **einseitige Grenzwerte** zu betrachten.

- Die Symbolik für den **linksseitigen Grenzwert** ist $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ und meint, dass wir bei der Annäherung an die Stelle a **nur** Werte $x < a$ verwenden.

- Die Symbolik für den **rechtsseitigen Grenzwert** ist $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ und meint, dass wir bei der Annäherung an die Stelle a **nur** Werte $x > a$ verwenden.

Bemerkung. Man verwendet auch oft die Relationen

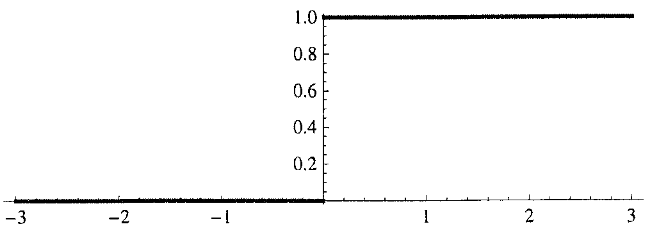
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a + \varepsilon) \quad , \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a - \varepsilon)$$

Satz.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad (\lim_{x\to a^-} f(x) = L \;\; \text{und} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L)$$

Beispiel. (**Sprungfunktion** oder **Heaviside-Funktion**)

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 & \text{für} \quad t > 0 \end{cases}$$



Offenbar gilt $\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0$ und $\lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$.

Rechengesetze.

Voraussetzung: Die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren!

1. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) \quad , \; c \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ falls $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Weitere Folgerungen.

1. $\lim_{x\to a} c = c \quad (c \in \mathbb{R}) \quad , \quad \lim_{x\to a} x = a$

2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad , \quad \lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad (n \in \mathbb{N})$

3. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n \quad , \quad \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad (n \in \mathbb{N})$

Der Ausdruck $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

bedeutet, dass die Werte von $f(x)$ beliebig groß werden, sofern x genügend nahe bei a ist.

Sprechweisen "$f(x)$ geht gegen unendlich, wenn $x \to a$" oder auch "$f(x)$ wächst über alle Grenzen, wenn $x \to a$" .

Analog wird $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ erklärt.

(Das Symbol ∞ ist allerdings keine Zahl!)

Bemerkung. Ähnliche Definitionen können auch für einseitige Grenzwerte getroffen werden:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Beispiel.

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x^2} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 0}(-\tfrac{1}{x^2}) = -\infty$$

Beispiel.

$$\lim_{x\to 0^-} \tfrac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \tfrac{2x}{3-x} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 3^+} \tfrac{2x}{3-x} = -\infty$$

Der Ausdruck $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$

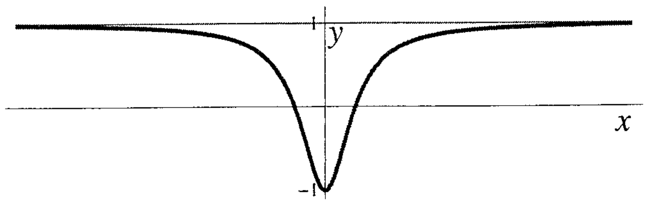
bedeutet, dass die Werte von $f(x)$ dem Wert L beliebig nahe kommen, wenn x groß genug gewählt wird (i.e. wenn x gegen Unendlich strebt).

Analog ist $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ zu verstehen.

Bemerkung. Für diese Ausdrücke gelten analoge Rechenregeln wie die zuvor erwähnten.

Beispiel. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Beispiel. Betrachte $\quad f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$



$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Beispiel. Betrachte den Graph von $\quad f(x) = e^{\frac{1}{x^2(2x+3)}}$