18. Kettenregel, Umkehrfunktion

Bemerkung. Betrachten wir die Funktion $y = F(x) = \sin(x^2 + 1)$.

Wir können diese Funktion als Komposition von zwei Funktionen angeben, nämlich

$$y = f(u(x)) \quad , \quad f(u) = \sin u \quad , \quad u(x) = x^2 + 1$$

$$y = (f \circ u)(x)$$

Satz. Seien $f(u)$ und $u(x)$ differenzierbar und gelte ferner $y = F(x) = f(u(x))$. Dann gilt

$$F'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \tfrac{dF}{dx} = \tfrac{df}{du}\,|_{u(x)} \cdot \tfrac{du}{dx}$$

(Sprechweise: Äußere Ableitung mal innere Ableitung)

Bemerkung. Für das Beispiel vorher ergibt sich

$$F'(x) = \cos u\,|_{u(x)} \cdot u'(x) = \cos(x^2 + 1) \cdot 2x = 2x\cos(x^2 + 1)$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Umkehrfunktion und der Ableitung der Umkehrfunktion.

Allgemein gilt: Sind X, Y Mengen und ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, wo jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ entspricht mit $f(x) = y$, dann heißt f **umkehrbar** .

Wir können dann eine Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ definieren, wo $f(y)$ genau jener Wert $x \in X$ ist, für den $f(x) = y$ gilt.

Die Abbildung f^{-1} heißt **Umkehrabbildung**.

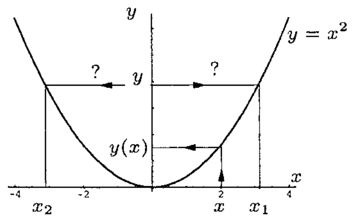
Offenbar gilt $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall\, x \in X$ und

$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall\, y \in Y$

Bemerkung. Ist eine beliebige Abbildung gegeben, dann ist es oft erforderlich zu entscheiden, zwischen welchen Bereichen Umkehrbarkeit besteht.

Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^2$.

Dann ist f für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und es gilt stets $f(x) \geq 0$.



Wir sehen auch, dass es für einen Wert $y > 0$ **zwei** Werte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $F(x_1) = f(x_2) = y$, nämlich $x_1 = \sqrt{y}$ und $x_2 = -\sqrt{y}$.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist also mit diesem Definitions- und Wertebereich **nicht** umkehrbar.

Schränken wir allerdings den Definitionsbereich ein und betrachten

$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$, dann liegt Umkehrbarkeit vor!

Die Umkehrabbildung $\psi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist durch

$x = \psi(y) = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ gegeben.

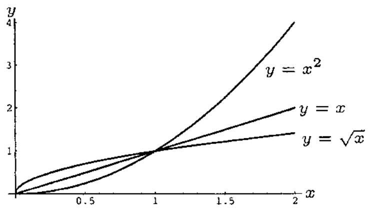
Satz. Sei f eine stetige und streng monoton fallende (bzw. steigende) Funktion auf dem Intervall $\mathbb{D}$, und sei $\mathbb{W}$ der Wertebereich.

Dann ist die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$, $x \mapsto y = f(x)$, umkehrbar.

Es existiert also die Umkehrfunktion

$$\psi = f^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{D} \quad , \quad y \mapsto x = \psi(y) = f^{-1}(y)$$

Bemerkung. Geometrisch erhält man den Funktionsgraphen der Umkehrfunktion zu einer Funktion f durch Spiegelung des Graphen an der Geraden $y = x$.



Satz. Sei die Funktion $y = f(x)$ stetig differenzierbar (glatt) im Intervall (a, b) und gelte $f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$.

Dann ist f umkehrbar und für die Umkehrfunktion $\psi(y)$ gilt:

$$\psi'(y) = \frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\psi(y))}$$

Beweis.

Wegen $y = f(x) = f(\psi(y))$ und der Kettenregel erhalten wir durch Differentiation nach y :

$$1 = f'(\psi(y)) \cdot \psi'(y) \quad \Rightarrow \quad \psi'(y) = \frac{1}{f'(\psi(y))} \qquad \square$$