19. Weitere elementare Funktionen

1. Der Arcussinus

Die Sinusfunktion $y = f(x) = \sin x$ (mit $y' = \cos x$) ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und somit existiert dort eine Umkehrfunktion.

$$f : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \sin x$$

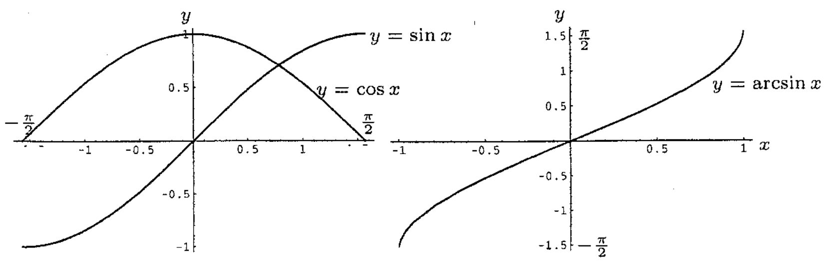
$$f^{-1} : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad , \quad y \mapsto x = \arcsin y$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(\arcsin y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x}$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

gilt $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.



2. Der Arcuscosinus

Die Cosinusfunktion $y = f(x) = \cos x$ (mit $y' = -\sin x$) ist im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und somit existiert dort eine Umkehrfunktion.

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \cos x$$

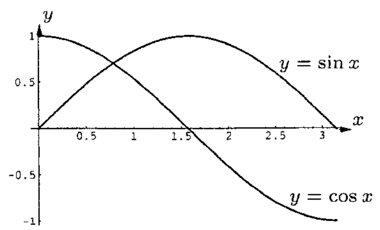
$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi] \quad , \quad y \mapsto x = \arccos y$$

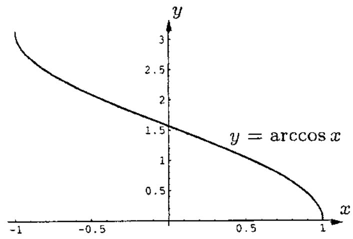
Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(\arccos y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\sin x}$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \;\Rightarrow\; \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ für $x \in [0, \pi]$

gilt $(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.





3. Der Arcustangens

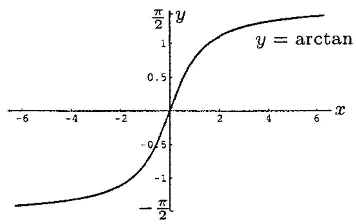
Die Tangensfunktion $y = f(x) = \tan x$ (mit $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$) ist im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und somit existiert dort eine Umkehrfunktion.

$$f : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \tan x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \quad , \quad y \mapsto x = \arctan y$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(\arctan y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$



4. Der Arcuscotangens

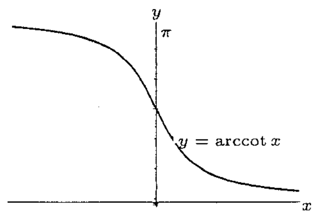
Die Cotangensfunktion $y = f(x) = \cot x$ (mit $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$) ist im Intervall $(0, \pi)$ streng monoton fallend und somit existiert dort eine Umkehrfunktion.

$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \cot x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi) \quad , \quad y \mapsto x = \operatorname{arccot}\, y$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(\operatorname{arccot}\, y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \ldots = -\frac{1}{1+\cot^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}$$



5. Potenzfunktion, Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

Bislang wurden folgende Arten von Potenzen von $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ definiert (manche davon gelten auch für beliebiges $a \in \mathbb{R}$):

- $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a \quad (n\text{–mal}) \ , \ n \in \mathbb{N}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a} \quad , \ m \in \mathbb{N}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad , \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad , \ m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Dabei gelten für Exponenten $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ und $a > 0$ die folgenden **Rechenregeln**:

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta \quad , \quad a^{\alpha-\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} \quad , \quad a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha$$

Wir wollen nun auch den Ausdruck a^α für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren, wobei wiederum $a > 0$ ist.

Dazu betrachtet man irgendeine Folge q_n von rationalen Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} q_n = \alpha$

(dies bedeutet: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha - q_n| < \varepsilon$ für $n \geq N_\varepsilon$), und setzt

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

(Man kann zeigen, dass dies unabhängig von der Wahl der Folge ist, welche gegen α strebt.)

Satz.

$$a^\alpha < a^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta \qquad \text{für} \;\; a > 1$$

$$a^\alpha < a^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \beta \qquad \text{für} \;\; 0 < a < 1$$

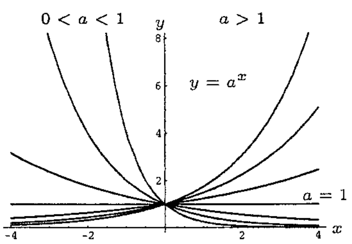
Die **Potenzfunktion** $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist definiert durch

$$x \mapsto x^\alpha \quad , \; \alpha \in \mathbb{R}$$

Die **Exponentialfunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist definiert durch

$$x \mapsto a^x \quad , \; a > 0$$

Sie ist streng monoton steigend für $a > 1$, eine konstante Funktion für $a = 1$, und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.



Weil die Exponentialfunktion streng monoton und stetig ist auf dem gesamten Defintionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, existiert für sie die Umkehrfunktion.

Definition. Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist der **Logarithmus**

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad , \quad y = a^x \;\leftrightarrow\; x = \log_a y$$

Rechenregeln. Mit der Schreibweise $\log_a y \equiv \log y$ gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\log a = 1 \quad , \quad \log 1 = 0$$

$$\log(y_1 y_2) = \log y_1 + \log y_2$$

$$\log \tfrac{y_1}{y_2} = \log y_1 - \log y_2$$

$$\log y^z = z \log y$$

Bemerkung. Einige Werte von a haben eine besondere Bedeutung, und dafür existiert auch eine eigene Schreibweise:

$a = 10$ $\quad \log_{10} y = \lg y$ ... dekadischer Logarithums

$a = e$ $\quad \log_e y = \ln y$ ... **natürlicher Logarithmus**

$a = 2$ $\quad \log_2 y = \mathrm{ld}\ y$ ... dualer Logarithmus

Dabei ist die **Euler'sche Zahl** e definiert als Grenzwert

$$e = \lim_{x\to\infty} (1 + \tfrac{1}{x})^x = 2,71828\ldots$$

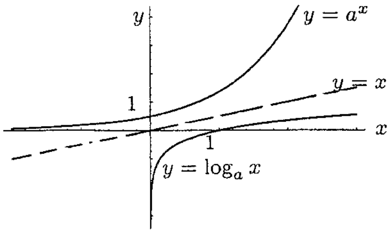
Eigenschaften der Logarithmusfunktion. $\quad (y = a^x \;\leftrightarrow\; x = \log_a y)$

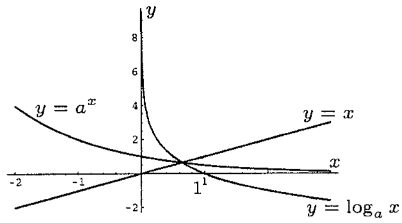
1. Für $a > 1$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

   $$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$$

2. Für $0 < a < 1$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$

   $$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$$





Wollen wir zwischen verschiedenen Logarithmen-Basen umrechnen, ergibt sich für $x_1 = \log_a y$ und $x_2 = \log_b y$:

$$y = a^{x_1} = b^{x_2} \quad \Rightarrow \quad \log_a a^{x_1} = \log_a b^{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 \log_a a = x_2 \log_a b \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \log_a b \quad \Rightarrow \quad \log_a y = \log_b y \cdot \log_a b \quad \Rightarrow \quad \log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$$

Speziell also etwa $\log_b y = \frac{\ln y}{\ln b}$.

Für die **Ableitung der Logarithmusfunktion** (Herleitung siehe Skriptum) ergibt sich

$$y(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x}\frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Speziell also $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Damit können wir nun auch die **Ableitung der Exponentialfunktion** bestimmen.

$$y = \log_a x \quad \leftrightarrow \quad x = a^y$$

$$(a^y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{d(a^y)}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{x \ln a}} = x \ln a = a^y \ln a$$

Speziell erhalten wir $(e^y)' = e^y$.

Für die **Ableitung der Potenzfunktion** $y = f(x) = x^\alpha$ erhielten wir im Falle $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Aussage

$$y'(x) = \alpha x^{\alpha - 1} \; .$$

Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ ist zunächst eine Umformung notwendig.

$$y = x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad \Rightarrow$$

$y'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

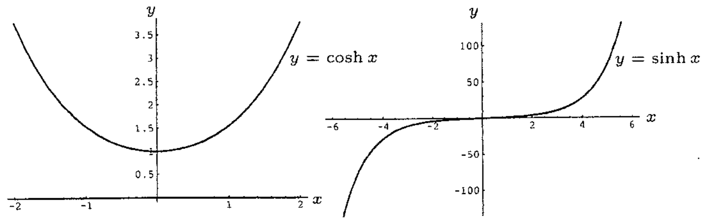
Beispiel. $y = f(x) = x^x = e^{x \ln x}$

$y' = e^{x \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x (1 + \ln x)$

6. Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

Diese Funktionen sind wie folgt definiert:

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$



1) Wegen $\sinh(-x) = -\sinh x$, ist der Sinus Hyperbolicus eine ungerade Funktion.

Wegen $\cosh(-x) = \cosh x$, ist der Cosinus Hyperbolicus eine gerade Funktion.

2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} =$

$= \frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] = 1$

Da $u = \cosh x$ und $v = \sinh x$ die Hyperbelgleichung $u^2 - v^2 = 1$ erfüllen, werden sie auch als "hyperbolische" Funktionen bezeichnet.

3) (**Ableitungen**)

$(\sinh x)' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$

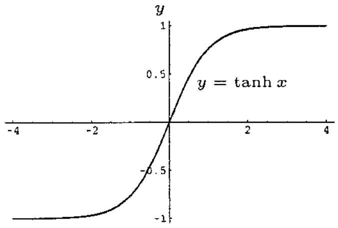
$(\cosh x)' = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$

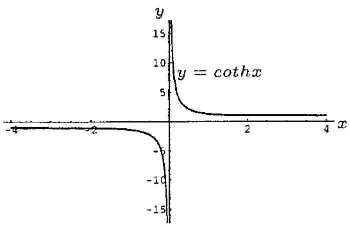
7. Tangens Hyperbolicus und Cotangens Hyperbolicus

Diese Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \to \mathbb{W} = (-1, 1)$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad , \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$





Beide Funktionen sind ungerade, und ihre Ableitungen sind

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

8. Die Area-Funktionen

Dies sind die Umkehrfunktionen zu den hyperbolischen Funktionen. Wir müssen dabei allerdings auf Definitions- und Wertebereich achten.

a) Areasinus Hyperbolicus

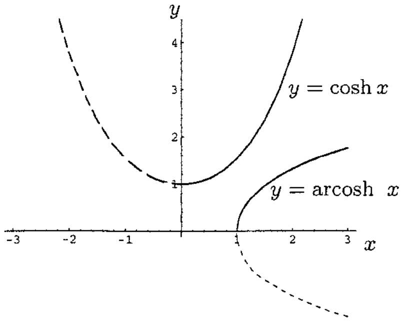
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = \sinh x$$

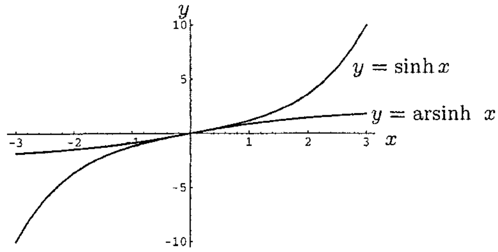
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad y \mapsto x = \text{arsinh } y$$

b) Areacosinus Hyperbolicus

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to [1, \infty) \quad , \quad x \mapsto y = \cosh x$$

$$f^{-1} : [1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad y \mapsto x = \text{arcosh } y$$





c) Areatangens Hyperbolicus

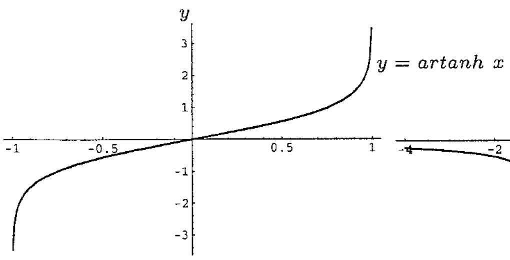
$f : \mathbb{R} \to (-1, 1) \quad , \quad x \mapsto y = \tanh x$

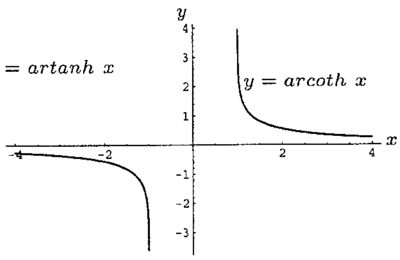
$f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R} \quad , \quad y \mapsto x = \operatorname{artanh} y$

d) Areacotangens Hyperbolicus

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \quad , \quad x \mapsto y = \coth x$

$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad , \quad y \mapsto x = \operatorname{arcoth} y$





Bemerkung. Die Area-Funktionen können auch mittels der Logarithmusfunktion dargestellt werden.

$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \quad \text{bzw.} \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$

Dies ist eine quadratische Gleichung für e^x , folglich

$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$.

Weil stets $e^x > 0$ und $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ ist, erhalten wir

- $x = \operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

$y = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$. Damit

- $x = \text{arcosh } y = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$

(Das negative Vorzeichen liefert den unteren Zweig der Funktion)

$y = \tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ liefert

- $x = \text{artanh } y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$, für $|y| < 1$ (damit $\frac{1+y}{1-y} > 0$)

$y = \coth x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ liefert

- $x = \text{arcoth } y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}$, für $|y| > 1$ (damit $\frac{y+1}{y-1} > 0$)

Für die **Ableitungen der Area-Funktionen** erhalten wir

a) $y = \text{arsinh } x \quad \leftrightarrow \quad x = \sinh y$

$\frac{dy}{dx} = (\text{arsinh } x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(Beachte dass $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ und $\cosh y \geq 0$)

b) $y = \text{arcosh } x \quad \leftrightarrow \quad x = \cosh y$

$\frac{dy}{dx} = (\text{arcosh } x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(Beachte dass für $y \in \mathbb{R}_0^+$ stets gilt $\sinh y \geq 0$)

c) $y = \text{artanh } x \quad \leftrightarrow \quad x = \tanh y$

$\frac{dy}{dx} = (\text{artanh } x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\tanh y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \cosh^2 y = \frac{\cosh^2 y}{1} =$

$= \frac{\cosh^2 y}{\cosh^2 y-\sinh^2 y} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$, $\mathbb{D} = (-1, 1)$

d) $y = \text{arcoth } x \quad \leftrightarrow \quad x = \coth y$

$$\frac{dy}{dx} = (\text{arcoth } x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\coth y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = -\sinh^2 y = \frac{-\sinh^2 y}{1} =$$

$$= \frac{-\sinh^2 y}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1-\coth^2 y} = \frac{1}{1-x^2} \quad , \ \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus [-1,1]$$

9. Höhere Ableitungen

Definition. Die Ableitung von f' bezeichnen wir, falls sie existiert, mit f'' und schreiben

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

Die weiteren **höheren Ableitungen** werden mit

$f''', f^{(IV)}, \ldots, f^{(n)}$ bezeichnet.

Beispiel. Für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad , \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \quad \ldots$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x^{n-k} = k!\binom{n}{k}x^{n-k} \quad \text{für } k \le n$$

$$f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{für } k > n$$

Beispiel. Für $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ erhalten wir

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f''(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{x}$$

$f'''(x) = \frac{15}{8}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{15}{8\sqrt{x}}$ ist für $x = 0$ **nicht** definiert.

Beispiel. (**Harmonischer Oszillator**)

Die Auslenkung $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t ergibt sich zu

$$s(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \quad , \quad A, \omega, \alpha \in \mathbb{R}$$

Für die Geschwindigkeit $v(t)$ ergibt sich

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

Für die Beschleunigung $b(t)$ ergibt sich

$$b(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha)$$

Beachte, dass $b(t) = -\omega^2 s(t)$. Die rücktreibende Kraft $mb(t)$ ist also proportional zur Auslenkung $s(t)$ (Hook'sches Gesetz).