24. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition. Eine **gewöhnliche Differentialgleichung** ist eine Gleichung zwischen einer unabhängigen Variablen x , einer Funktion $y(x)$ und deren Ableitungen $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Der Grad der höchsten vorkommenden Ableitung ist die **Ordnung** der Differentialgleichung.

Eine **Lösung** einer Differentialgleichung ist eine (genügend oft differenzierbare) Funktion, welche die Dgl. identisch erfüllt.

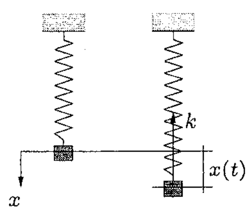
Beispiel. $xy''' + (y')^2(y^3 - 1) + \sin x = 0$ ist eine Dgl. 3. Ordnung.

$y = \sin x$ ist eine Lösung der Dgl. $y'' + y = 0$, weil für alle x gilt dass $(\sin x)'' + \sin x = 0$.

Bemerkung. Treten mehrere unabhängige Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$, eine Funktion $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und deren partielle Ableitungen, so spricht man von einer **partiellen Differentialgleichung** (siehe Mathematik 2).

Beispiel. Wir wollen die Frequenz eines Federpendels berechnen, wobei eine Masse m an eine Spiralfeder aufgehängt ist.

Die Federkonstante wird mit c bezeichnet, die Zeit mit t und die Auslenkung aus der Ruhelage mit $x(t)$.



Dann ist $v = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit, und $b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ die Beschleunigung.

Für die Bestimmung der Frequenz verwenden wir die aus der Physik bekannten, die Kraft F betreffenden Gesetze nach Hook und Newton

$$F = -c \cdot x \quad \text{(Hook)} \quad , \quad F = m \cdot b \quad \text{(Newton)}$$

Wir erhalten $m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x$ bzw. $m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0$.

Die allgemeine Lösung dieser Dgl. (zweiter Ordnung) ist

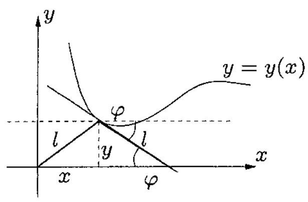
$$x(t) = C_1 \sin(\omega(t + C_2)) \quad ,$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Konstante sind und $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

Mit $\omega = 2\pi\nu$ ergibt sich $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$. Dabei ist ν die **Frequenz** und ω die **Kreisfrequenz**.

Durch Einsetzen in die Dgl. kann man sich leicht von der Richtigkeit der Lösung überzeugen.

Beispiel. Gesucht ist jene Kurve $y = y(x)$, für die die Tangentenlänge in einem Punkt P der Kurve stets gleich der Länge der Strecke $\overline{OP}$ ist.



$$l = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{l} \;\; (\Rightarrow \;\; y = l \sin\varphi) \quad , \quad \tan\varphi = y'(x)$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\frac{1}{\cos\varphi}} = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}}} = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{\tan^2\varphi + 1}} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}$$

Damit ist $y = l\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}} = \sqrt{x^2 + y^2}\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}}$ bzw.

$y\sqrt{y'^2 + 1} = y'\sqrt{x^2 + y^2}$. Quadrieren liefert nun

$y^2(y'^2+1) = y'^2(x^2+y^2)$ bzw. $y^2 = x^2y'^2$

Daraus folgt $y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$ bzw. $y' = \pm\frac{y}{x}$.

• Die Lösung der Dgl. $y' = \frac{y}{x}$ ist $y = Cx$ mit $C \in \mathbb{R}$. Dies ist eine Geradenschar durch den Ursprung.

• Die Lösung der Dgl. $y' = -\frac{y}{x}$ ist $y = \frac{C}{x}$ mit $C \in \mathbb{R}$. Dies ist eine Hyperbelschar.

Die wichtigste Frage ist natürlich, wie bei einer vorgelegten Dgl. eine entsprechende Lösung gefunden werden kann.

• Für gewisse Typen von Dgln. gibt es **Lösungsverfahren**, die in der Literatur gefunden werden können oder in Computeralgebrasystemen (wie Maple oder Mathematica) implementiert sind.

• Weiters können **numerische Methoden** verwendet werden.

• Zu den **analytischen Näherungsmethoden** gehören u.a. die Reihenentwicklung und die sukzessive Approximation.

Die **allgemeine Lösung** einer Dgl. 1. Ordnung enthält **eine** beliebige Konstante C . Dies entspricht geometrisch einer Kurvenschar mit dem Scharparameter C .

Wählt man für C einen speziellen Wert, dann erhält man eine spezielle Lösungskurve.

Definition. Ein **Anfangswertproblem (AWP)** ist eine Problemstellung, die aus folgenden beiden Bedingungen besteht:

Differentialgleichung (Dgl.) : $y' = f(x,y)$

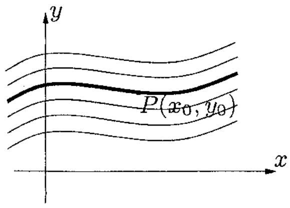
Anfangsbedingung (AB) : $y(x_0) = y_0$

Gesucht sind also Lösungen, die durch den Punkt (x_0, y_0) gehen.

Wir diskutieren nun elementare einfache Typen von Differentialgleichungen.

1) $y' = f(x)$

Die allgemeine Lösung ist offenbar $\quad y(x) = \int f(x)dx + C \quad , \ C \in \mathbb{R}$



2) Dgl. mit getrennten Variablen: $\quad y' = \frac{f(x)}{g(y)}$

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $G(y)$ eine Stammfunktion von $g(y)$.

Dann ist $\quad G(y) = F(x) + C \quad , \ C \in \mathbb{R} \quad$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(Differenzieren nach x liefert

$G'(y) \cdot y' = F'(x) \ \Rightarrow \ g(y) \cdot y' = f(x) \quad$ bzw. $\quad y' = \frac{f(x)}{g(y)}$)

Formal kann geschrieben werden

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \Rightarrow \ g(y)dy = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx + C$

3) Lineare Dgl. 1. Ordnung $\quad y' + f(x) \cdot y = g(x)$

Bemerkung. y und y' treten nur in erster Potenz auf. Die Funktion g wird oft auch als **Störfunktion** bezeichnet.

Die obige Dgl. wird auch als **inhomogene Dgl.** bezeichnet. Die zugehörige **homogene Dgl.** ist $\quad y' + f(x) \cdot y = 0$.

Wir behandeln zuerst die homogene Dgl. $\ y' + f(x) \cdot y = 0$. Dies ist eine Dgl. mit getrennten Variablen.

Offenbar ist $\quad y \equiv 0 \quad$ eine Lösung. Für $y \neq 0$ gilt

$\frac{dy}{dx} = -f(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx + C \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\int f(x)dx + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-\int f(x)dx} \cdot e^C \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y = \pm e^C \cdot e^{-\int f(x)dx}$

Durchläuft C alle reellen Zahlen, dann durchläuft e^C alle positiven reellen Zahlen, und $\pm e^C$ alle reellen Zahlen $\neq 0$. Weil auch $y = 0$ Lösung ist, können wir die allgemeine Lösung in der Form

$y(x) = K \cdot e^{-\int f(x)dx}$, $K \in \mathbb{R}$ anschreiben.

Satz. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung $y_H(x)$ der zugehörigen homogenen Dgl. und einer speziellen Lösung (**partikulären** Lösung) $y_I(x)$ der inhomogenen Dgl., also

$y(x) = y_H(x) + y_I(x)$

Die Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Dgl. kann durch "Erraten", mittels eines geeigneten Ansatzes oder mit Hilfe der **Methode der Variation der Konstanten** erfolgen.

Wir betrachten dabei die allgemeine Lösung $y_H(x) = K \cdot e^{-\int f(x)dx}$ der zugehörigen homogenen Dgl. und setzen $y_1(x) = e^{-\int f(x)dx}$.

Dann ist $y_1'(x) = y_1(x) \cdot (-f(x))$.

Nun treffen wir den Ansatz

$y_I(x) = K(x) \cdot y_1(x) \quad \Rightarrow \quad y_I' = K' \cdot y_1 + K \cdot y_1'$

Eingesetzt in die (inhomogene) Dgl. erhalten wir

$K' \cdot y_1 + K \cdot y_1' + f \cdot K \cdot y_1 = g \quad \Rightarrow \quad K' \cdot y_1 = g \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad K' = \frac{g}{y_1} \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int \frac{g(x)}{y_1(x)} dx$

Mit dieser Funktion $K(x)$ ist $y_I(x)$ gefunden und es ist

$y(x) = y_H(x) + y_I(x)$.