25. Unbestimmte Ausdrücke

Bei der Bestimmung des Funktionsgrenzwertes $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ tritt manchmal die Situation auf, dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \textbf{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$(\text{oder auch} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \textbf{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty)$$

Derartige Ausdrücke werden symbolisch in der Form $(\frac{0}{0})$ (bzw. $(\frac{\infty}{\infty})$) geschrieben, weil ihnen vorderhand kein Wert zugeordnet werden kann.

Sie sind Beispiele für sogenannte **unbestimmte Ausdrücke**, von denen es auch noch weitere gibt.

Beispiel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = (\tfrac{0}{0}) = \lim_{x \to 0} x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = (\tfrac{0}{0}) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Beispiel. Betrachte $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = (\frac{0}{0})$

Mit Verwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ und der Setzung $f(t) = \sin t$, $g(t) = t$, $a = 0$, $b = x$ folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{c \to 0} \frac{\cos c}{1} = 1$$

Satz. (**Regel von de l'Hospital**)

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien stetig differenzierbar mit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Ferner sei $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 .

Dann gilt: Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung. Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, dann ist die Regel von de l'Hospital ebenfalls anwendbar durch Übergang zu

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)}{g(x)} = (\tfrac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = (\tfrac{0}{0})$$

(Hier ist der Fall $x_0 = \pm\infty$ zugelassen.)

Bemerkung. Liefert die Regel von de l'Hospital nach einmaliger Anwendung wieder einen unbestimmten Ausdruck, kann sie nochmals angewendet werden auf die Situation

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

- Unbestimmte Ausdrücke der Form $(0\cdot\infty)$, wo also $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ zu bestimmen ist, können auf die Form $(\frac{0}{0})$ oder $(\frac{\infty}{\infty})$ gebracht werden.

Beispiel. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cot x = (0\cdot\infty) =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \tfrac{x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{x}{\tan x} = (\tfrac{0}{0}) \overset{l'Hosp}{=} \lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \cos^2 x = 1$$

Beispiel. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = (0\cdot\infty) =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \tfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = (\tfrac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Man beachte, dass die alternative Umformung $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = (\frac{0}{0})$ wesentlich komplizierter wäre.

- Der unbestimmte Ausdruck $(\infty - \infty)$ kann ebenfalls auf die Formen $(\frac{0}{0})$ oder $(\frac{\infty}{\infty})$ gebracht werden.

Beispiel. $\lim\limits_{x\to 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}) = (\infty - \infty) =$

$$= \lim_{x\to 1} \tfrac{(x+1)-2x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \tfrac{1-x}{x^2-1} = \left(\tfrac{0}{0}\right) \overset{l'Hosp}{=} \lim_{x\to 1} \tfrac{-1}{2x} = -\tfrac{1}{2}$$

- Die unbestimmten Ausdrücke (1^∞) , (0^0) , ∞^0 können unter Verwendung von $a^b = e^{b \ln a}$ auf die vorherigen Typen umgeformt werden.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$$

Beispiel. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = (0^0) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\tfrac{\infty}{\infty}\right) \overset{l'Hosp}{=} \lim_{x\to 0^+} \tfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Folglich ist $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.