26. Kurvendiskussion

Folgende Eigenschaften einer Funktion $y = f(x)$ sind im allgemeinen von Interesse.

1) Definitionsbereich

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist der Ausdruck $f(x)$ definiert?

Auszunehmen sind etwa negative Werte unter der Quadratwurzel, Division durch Null, Argument des Logarithmus kleiner als Null etc.

2) Nullstellen

$x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Nullstelle von $f(x)$, wenn $f(x_0) = 0$. An den Nullstellen schneidet die Kurve die $x-$Achse.

3) Extrema und Wendepunkte

Wir wissen bereits: ist $f(x)$ differenzierbar im Intervall $[a, b]$, dann wird das Minimum bzw. Maximum angenommen. Man spricht vom **globalen Minimum** bzw. **globalen Maximum** im Intervall $[a, b]$.

Definition.

• $x_1 \in (a, b)$ ist die Stelle eines **relativen** oder **lokalen Minimums**, wenn es eine Umgebung $U(x_1)$ von x_1 gibt mit

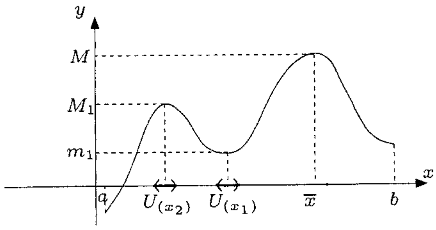
$$f(x) \geq f(x_1) \quad \forall\, x \in U(x_1)\ .$$

• $x_2 \in (a, b)$ ist die Stelle eines **relativen** oder **lokalen Maximums**, wenn es eine Umgebung $U(x_2)$ von x_2 gibt mit

$$f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\, x \in U(x_2)\ .$$

Bemerkung. Das globale Maximum (bzw. Minimum) einer auf $[a, b]$

definierten Funktion tritt entweder an einem der Randpunkte oder als größtes relatives Maximum (bzw. kleinstes relatives Minimum) im Inneren des Intervalls auf.



Satz. Sei $f(x)$ differenzierbar im offenen Intervall (a, b) . Liegt an $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum vor, dann gilt notwendigerweise

$$f'(x_0) = 0 \ . \qquad \text{D.h. die Tangente ist in } x_0 \text{ horizontal.}$$

Bemerkung. Aus der Bedingung $f'(x) = 0$ erhalten wir somit jene Stellen, die für ein lokales Extremum in Frage kommen.

Allerdings ist diese Bedingung nicht hinreichend. Für $y = f(x) = x^3$ gilt zwar $f'(0) = 0$, aber es liegt kein lokales Extremum vor.

Satz. Die Funktion $f(x)$ sei $(n + 1)-$mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0 und es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$$

Ist n **ungerade** , dann liegt im Punkt x_0 ein lokales Extremum vor,

$$\text{Minimum für } f^{(n+1)}(x_0) > 0 \ , \ \text{Maximum für } f^{(n+1)}(x_0) < 0 \ .$$

Ist n **gerade** , dann liegt im Punkt x_0 ein **Wendepunkt** vor.

Bemerkung. Häufig tritt die Situation auf

$$f'(x_0) = 0 \ , \ f''(x_0) > 0 \quad \ldots \text{ relatives Minimum}$$

$$f'(x_0) = 0 \ , \ f''(x_0) < 0 \quad \ldots \text{ relatives Maximum}$$

$$f''(x_0) = 0 \ , \ f'''(x_0) \neq 0 \quad \ldots \text{ Wendepunkt}$$

4) Asymptoten

Definition. Eine **Asymptote** ist eine Gerade, welche der Kurve $y = f(x)$ beliebig nahe kommt, ohne sie im Endlichen zu erreichen.

- Die Gerade $x = x_0$ ist eine **vertikale Asymptote** von $f(x)$, wenn

  $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

- Die Gerade $y = d$ ist eine **horizontale Asymptote** von $f(x)$, wenn

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = d$ existiert.

- Die Gerade $y = kx + d$ ist eine Asymptote, wenn die Grenzwerte

  $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $d = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$ existieren.

5) Monotonieverhalten

Wir betrachten $y = f(x)$ im Intervall (a, b) .

$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$: f ist monoton steigend in (a, b)

$f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$: f ist streng monoton steigend in (a, b)

$f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$: f ist monoton fallend in (a, b)

$f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$: f ist streng monoton fallend in (a, b)