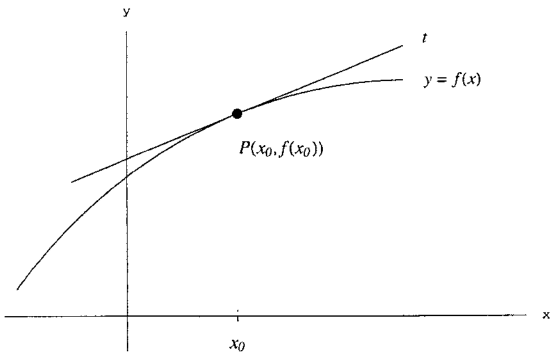
28. Lineare Approximation und Differentiale

Sei $y = f(x)$ differenzierbar. Die Gleichung der Tangente t im Punkt x_0 lautet

$$t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



Für x "nahe" bei x_0 können wir $f(x)$ durch den Funktionswert der die Tangente beschreibenden linearen Funktion approximieren.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Dies nennt man die **lineare Approximation** von f in x_0 . Die lineare Funktion $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ heißt die **Linearisierung** von f in x_0 .

Beispiel. Eine gefüllte Gans wird mit der Temperatur von $10°$ aus dem Kühlschrank genommen und in einen Ofen, der auf $180°$ aufgeheizt ist, geschoben. Nach einer Stunde zeigt das Fleischthermometer im Inneren der Gans eine Temperatur von $34°$, nach 2 Stunden $54°$. Man treffe eine Voraussage darüber, welche Temperatur nach 3 Stunden im Inneren der Gans herrschen wird.

Sei die Funktion $T(t)$ die Temperatur im Inneren der Gans (wir kennen allerdings diese Funktion nicht). Dann gilt

$$T(0) = 10 \quad , \quad T(1) = 34 \quad , \quad T(2) = 54$$

Wir führen eine lineare Approximation von $T(t)$ im Punkt $t = 2$ durch. Weil uns $T'(2)$ nicht bekannt ist, approximieren wir diesen Wert durch den Differenzenquotienten

$$T'(2) \approx \frac{T(1)-T(2)}{1-2} = \frac{34-54}{1-2} = 20$$

Die Temperatur ändert sich also mit einer Rate von $20°$ pro Stunde. Mit dieser Schätzung ist die lineare Approximation für die Temperatur nach 3 Stunden

$$T(3) \approx T(2) + T'(2)(3-2) \approx 54 + 20 \cdot 1 = 74$$

Bemerkung. Durch eine zusätzliche Untersuchung erhält man eine genauere Voraussage, nämlich $T'(2) = 19$, wodurch sich für die lineare Approximation ergibt

$$T(3) \approx T(2) + T'(2)(3-2) \approx 54 + 19 \cdot 1 = 73$$

In Wahrheit wird die Temperatur nach 3 Stunden etwas geringer sein, da die Kurve unterhalb der Tangente liegt.

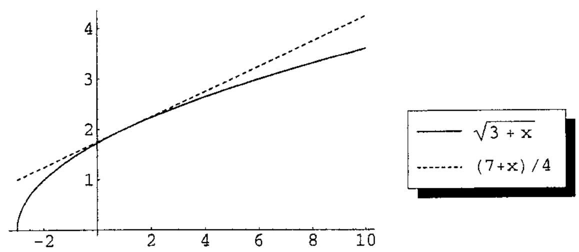
Beispiel. Man bestimme die Linearisierung der Funktion $f(x) = \sqrt{x+3}$ in $x = 1$ und approximiere damit die Zahlen $\sqrt{3.98}$ und $\sqrt{4.05}$. Liegen diese Näherungen zu hoch oder zu tief?

$$f(x) = \sqrt{x+3}\ , \ f(1) = 2 \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}\ , \ f'(1) = \frac{1}{4}$$

Damit ist $L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$, also

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

Speziell $\sqrt{3.98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0.98}{4} = 1.995$, $\sqrt{4.05} \approx \frac{7}{4} + \frac{1.05}{4} = 2.0125$



Wir sehen, dass die Näherung nahe bei $x_0 = 1$ gut ist, die Diskrepanz aber zunimmt, wenn man sich von $x_0 = 1$ weiter entfernt. Weiters sieht man, dass die Näherungswerte zu hoch liegen, da die Kurve unterhalb der Tangente liegt.

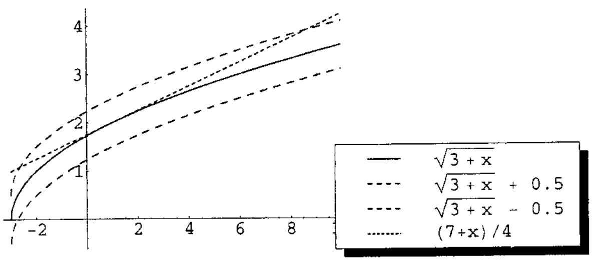
Wir fragen nun, für welche Werte x die Approximation innerhalb einer Fehlergrenze von 0.5 liegt. Also

$$|\sqrt{x+3} - (\tfrac{7}{4} + \tfrac{x}{4})| < 0.5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -0.5 < \sqrt{x+3} - (\tfrac{7}{4} + \tfrac{x}{4}) < 0.5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \tfrac{7}{4} + \tfrac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

Die lineare Approximation soll also zwischen den beiden Kurven liegen, die man durch Parallelverschiebung von $y = \sqrt{x+3}$ um 0.5 nach oben und unter erhält.



Die Tangente $y = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$ schneidet die obere Kurve $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ an den (ungefähren) Stellen -2.66 und 8.66 .

Daher wird für $-2.6 < x < 8.6$ die geforderte Fehlerschranke von 0.5 eingehalten.

Auf ähnliche Weise kann man sehen, dass auf dem Intervall $-1.1 < x < 3.9$ eine Fehlerschranke von 0.1 eingehalten wird.

Definition. Das **Differential** der Funktion f in x_0 ist die lineare Funktion

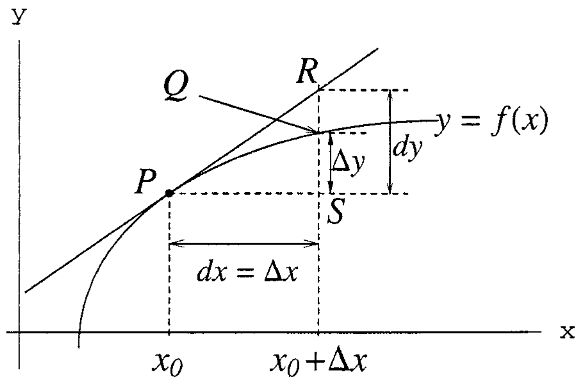
$$df: \; \overline{x} \to \overline{y} = df(\overline{x}) = f'(x_0) \cdot \overline{x}$$

(Das ist die lineare Funktion, die die Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0)$ beschreibt.)

Schreibweise. Man ersetzt $\overline{x}$ durch dx und $\overline{y}$ durch dy , und erhält so

$$df: \ dx \to dy = f'(x_0)dx$$

Hier ist dy eine abhängige Variable. Ist weiters $dx \neq 0$, dann erhalten wir $\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$.



Aus obiger Abbildung kann eine geometrische Interpretation des Differentials gewonnen werden.

Seien $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ zwei Punkte auf der Kurve $y = f(x)$ und sei $dx = \Delta x$.

Die Differenz der Funktionswerte in P und Q ist

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Die Steigung der Tangente in P ist $f'(x_0)$. Damit ist der (gerichtete) Abstand von S nach R gegeben durch

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \ .$$

Die Größe dy gibt also das Maß an, um das die Tangente ansteigt bzw. abfällt, während Δy das Maß dafür angibt, wie stark die Kurve $y = f(x)$ steigt oder fällt, wenn x sich um dx ändert.

Beispiel. Man vergleiche die Werte Δy und dy für $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$, wenn x sich von 2.0 auf 2.05 bzw. auf 2.01 ändert.

$f(2) = 9$, $f(2.05) = 9.717625$, $\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$

Allgemein ist $dy = f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)dx$.

Mit $x_0 = 2$ und $\Delta x = dx = 0.05$ folgt $dy = 14 \cdot 0.05 = 0.7$.

$f(2.01) = 9.140701$, $\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$

Mit $x_0 = 2$ und $\Delta x = dx = 0.01$ folgt $dy = 14 \cdot 0.01 = 0.14$.

Man sieht, dass die Approximation $\Delta y \approx dy$ besser wird, wenn Δx kleiner wird. In manchen Fällen kann es unmöglich sein, Δy exakt zu berechnen. Dort ist die Approximation durch das Differential dy besonders nützlich.

Bemerkung. In der Schreibweise mittels Differential kann die lineare Approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

nun geschrieben werden als

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + dy$$

Für $f(x) = \sqrt{x+3}$ gilt $dy = f'(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}dx$.

Mit $x = 1$ und $dx = \Delta x = 0.05$ folgt $dy = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} \cdot 0.05 = 0.0125$

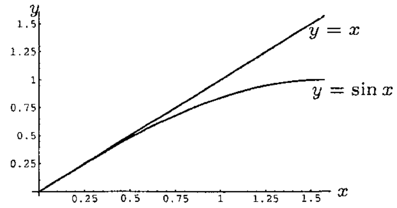
und $\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$.

Beispiel. Betrachte $f(x) = \sin x$ mit $x_0 = 0$.

Unter Verwendung von $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ und $x = x_0 + h$ erhalten wir

$$f(x_0 + h) = \sin(0 + h) \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot h \text{ , also } \sin h \approx h \text{ .}$$

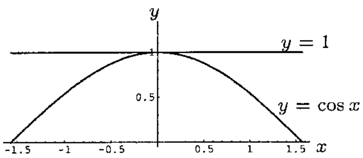
Für "sehr kleines" h kann damit $\sin h$ durch h ersetzt werden.



Beispiel. Betrachte $f(x) = \cos x$ mit $x_0 = 0$.

Hier erhalten wir $\cos(0 + h) \approx \cos 0 + (-\sin 0) \cdot h$, also $\cos h \approx 1$.

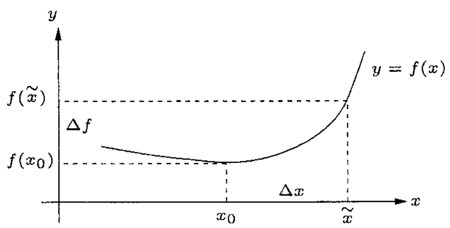
Für "sehr kleines" h kann damit $\cos h$ durch 1 ersetzt werden.



Fehlerrechnung.

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f(x)$. Man misst die unabhängige Variable mit einem gewissen Messfehler. Wird statt des exakten Wertes x_0 der Näherungswert $\widetilde{x}$ gemessen, so hat dieser Messfehler $\Delta x = x_0 - \widetilde{x}$ einen gewissen Einfluss auf den Funktionswert. Dieser Fehler des Funktionswertes wird durch

$\Delta f = f(x_0) - f(\widetilde{x})$ angegeben.



Der **absolute Fehler** Δf wird approximiert durch das entsprechende Differential

$$\Delta f \approx f'(x_0) \cdot (x_0 - \widetilde{x} \quad \text{bzw.} \quad |\Delta f| \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x|$$

Die Größen $\frac{\Delta x}{x_0}$ und $\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \Delta x$ heißen **relativer Fehler**.

Beispiel. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist durch $A = f(x) = x^2$ gegeben.

Die Messung der Seitenlänge x kann nun beispielsweise den Wert 10 ± 10^{-2} Meter ergeben, also $x_0 = 10m$, $\Delta x = 10^{-2}m$.

Der relative Fehler ist $\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{0{,}01}{10} = 0,1\%$

$f(x) = x^2$, $f(x_0) = 100$, $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 20$

$|\Delta f| \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x| \quad \Rightarrow \quad |\Delta f| \approx 20 \cdot 0,01 = 0,2$

Damit ist $A \pm \Delta A \approx 100 \pm 0,2m^2$.

Der relative Fehler ist

$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta f}{f(x_0)} \approx \frac{0{,}2}{100} = 0,2\%$.

Die exakte Berechnung ergibt

$f(x_0 + \Delta x) = 100,2001m^2$, $f(x_0 - \Delta x) = 99,8001m^2$

Also $99,8001 \leq A \leq 100,2001$.

Rechenregeln für Differentiale.

Schreibweisen: $df\,|_{x_0}(\bar{x}) = \bar{y}$ bzw. $df\,|_{x_0}(dx) = dy \Rightarrow dy = f'(x_0)dx$

- $d(f+g) = (f+g)'dx = f'dx + g'dx = df + dg$
- $d(c \cdot f) = (c \cdot f)'dx = c \cdot f'dx = c \cdot df$, $c \in \mathbb{R}$
- $d(f \cdot g) = (f \cdot g)'dx = (f'g + fg')dx = g \cdot df + f \cdot dg$
- $d(\frac{f}{g}) = (\frac{f}{g})'dx = \frac{gf' - fg'}{g^2}dx = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$
- $d(f(g)) = (f(g(x)))'dx = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g) \cdot dg = df(g)$