

29. Taylorpolynome - Taylorreihen

Bislang haben wir eine Funktion $f(x)$ in einer Umgebung eines Punktes x_0 lediglich durch eine lineare Funktion (Differential), also ein Polynom ersten Grades, approximiert.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \varphi_1(x) = P_1(x, x_0)$$

Dabei gilt: $\varphi_1(x_0) = f(x_0)$, $\varphi_1'(x_0) = f'(x_0)$

Ist $f(x)$ im betrachteten Intervall genügend oft differenzierbar, können wir $f(x)$ das **Taylorpolynom n -ter Ordnung** mit dem Entwicklungspunkt x_0 zuordnen.

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Setzen wir $\varphi_n(x) = P_n(x, x_0)$, dann gilt

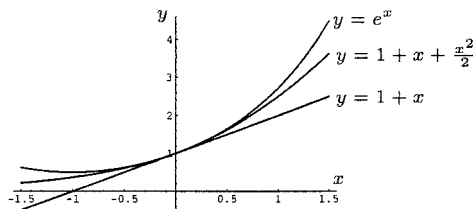
$$\begin{aligned} \varphi_n(x_0) &= f(x_0), \quad \varphi_n'(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad \varphi_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \\ \varphi_n^{(n+1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel. Betrachte $f(x) = e^x$ mit $x_0 = 0$.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$$



Das Taylorpolynom 1. Ordnung ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x$$

Das Taylorpolynom 2. Ordnung ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Wir beobachten, dass $\varphi_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (=Taylorpolynom 2. Ordnung) eine bessere Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ darstellt als das Taylorpolynom 1. Ordnung.

Wir können nun schreiben

$$f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0) \quad \text{bzw.} \quad R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$$

Dabei ist $R_n(x, x_0)$ der "Unterschied" zwischen $f(x)$ und $P_n(x, x_0)$, also der Fehler bei der Approximation von $f(x)$ durch das Taylorpolynom n -ter Ordnung.

$R_n(x, x_0)$ wird als **Restglied** (n -ter Ordnung) bezeichnet. Es gilt

$$R_n(x_0, x_0) = 0, \quad R'_n(x_0, x_0) = 0, \quad \dots, \quad R_n^{(n)}(x_0, x_0) = 0$$

$$R_n^{(n+1)}(x, x_0) = f^{(n+1)}(x)$$

Durch Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes erhält man folgende Darstellung für das Restglied

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dabei ist c eine Stelle zwischen x_0 und x .

Diese kann auch in der Form

$$c = x_0 + \vartheta \cdot (x - x_0), \quad 0 < \vartheta < 1 \quad \text{angegeben werden.}$$

Ist nun $f(x)$ unendlich oft differenzierbar, dann können wir der Funktion $f(x)$ ihre Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt x_0 zuordnen.

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$ (dies ist allerdings nicht immer der Fall!), dann wird $f(x)$ durch ihre Taylorreihe dargestellt, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Allgemein ist zu sagen, dass die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ diese auf einem gewissen Intervall, dem **Konvergenzintervall**, darstellt.

Beispiel. Betrachte $f(x) = e^x$ mit $x_0 = 0$.

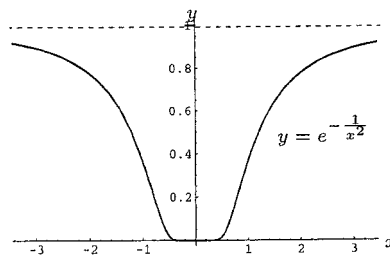
Dann ist $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = 1$ für $k = 0, 1, 2, \dots$

Damit $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(k+1)!} x^{k+1}$

Weil $\frac{e^{\vartheta x}}{(k+1)!} x^{k+1} \rightarrow 0$ (für festes x und $k \rightarrow \infty$), gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\text{Taylorreihe von } e^x)$$

Beispiel. Betrachte $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$



Weil $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, ist die Funktion stetig in $x_0 = 0$.

Des weiteren stellt sich heraus, dass $f^{(k)}(x_0) = 0$ für alle k ist.

Folglich ist die Taylorreihe von $f(x)$ die Nullfunktion. In diesem Fall wird die Funktion also **nicht** durch ihre Taylorreihe dargestellt.

Beispiel. $f(x) = \ln(1 + x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f^{(IV)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(IV)}(0) = -6$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Folglich gilt

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \dots$$

Beispiel. Weil $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Beispiel. $f(x) = \sin x$ mit $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(IV)}(x) = \sin x = f(x) \Rightarrow f^{(IV)}(0) = 0$$

$$f^{(V)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(V)}(0) = 1$$

⋮

Daraus ergibt sich das Bildungsgesetz

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad , \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Folglich ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Analog erhalten wir für $f(x) = \cos x$ und $x_0 = 0$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \quad , \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Folglich ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Beispiel. Für die Ermittlung der (komplexen) Reihe zur Funktion $f(x) = e^{ix}$ mit $x_0 = 0$ verwenden wir die Reihe $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ und setzen $u = ix$ ein.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \\ &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Mit $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ etc. folgt nun

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = \\ &= \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Bemerkung. $\cos x$ und $\cosh x$ sind gerade Funktionen und in den zugehörigen Reihen treten nur gerade Potenzen von x auf.

$\sin x$ und $\sinh x$ sind ungerade Funktionen und in den zugehörigen Reihen treten nur ungerade Potenzen von x auf.

Beispiel. (Binomialreihe)

Wir betrachten $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $x_0 = 0$.

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ erhalten wir bekanntlich nach dem binomischen Lehrsatz ein Polynom

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Dabei ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Dies ermöglicht es, den Ausdruck $\binom{\alpha}{k}$ auch für $\alpha \in \mathbb{Q}$ (sogar für $\alpha \in \mathbb{R}$) zu definieren,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1) = k! \binom{\alpha}{k}$$

Mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ folgt nun

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (\text{für } |x| < 1)$$

Rückblick auf Bestimmung von Extrema

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0+\vartheta(x-x_0))}{2!} (x-x_0)^2$$

Mit $h = x - x_0$ erhalten wir die Darstellung

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0+\vartheta h)}{2!} h^2$$

Ist nun $f'(x_0) = 0$ dann ist $f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f''(x_0 + \vartheta h)}{2!} h^2$

- Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist auch $f''(x_0 + \vartheta h) > 0$ für hinreichend kleines h und folglich ist

$$f(x_0 + h) > f(x_0) \quad \dots \text{lokales Minimum}$$

- Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist auch $f''(x_0 + \vartheta h) < 0$ für hinreichend kleines h und folglich ist

$$f(x_0 + h) < f(x_0) \quad \dots \text{lokales Maximum}$$

- Ist $f''(x_0) = 0$, dann ist

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'''(x_0 + \vartheta h)}{3!} h^3$$

Der Faktor h^3 kann nun positiv oder negativ sein. Unter der Annahme, dass $f''' \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 ist, liegt an der Stelle x_0 somit kein Extremum, sondern ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente vor.