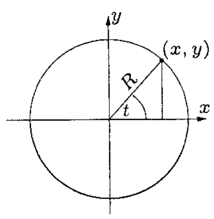
31. Kurven in Ebene und Raum

Für **ebene Kurven** (also Kurven im $\mathbb{R}^2$) gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten:

- **implizite Darstellung** : $F(x, y) = 0$
- **explizite Darstellung** : $y = f(x)$ oder $x = g(y)$
- **Parameterdarstellung** : $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit **Parameter** t

Beispiel. Durch die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ bzw. anders angeschrieben, $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ wird eine (volle!) Kreislinie im kartesischen Koordinatensystem dargestellt.



Offenbar ist $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ (bzw. $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$) .

Wir erhalten also eine explizite Darstellung lediglich für den oberen (bzw. unteren) Halbkreis durch

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{(bzw. } y = -\sqrt{R^2 - x^2}\text{)}$$

oder den linken (bzw. rechten) Halbkreis durch

$$x = -\sqrt{R^2 - y^2} \quad \text{(bzw. } x = \sqrt{R^2 - y^2}\text{)}$$

Führen wir einen Parameter t durch

$$x = x(t) = R\cos t \quad , \quad y = y(t) = R\sin t$$

ein, dann gilt $x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$

Der Parameter t ist dabei der Winkel. Um den gesamten Kreis zu durchlaufen, muss $0 \le t < 2\pi$ sein.

Definition. Die allgemeine Parameterdarstellung einer ebenen Kurve lautet also

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ .$$

Der Parameter t kommt dabei aus einem Parameterintervall $t \in [a, b]$ und wir nehmen weiters an, dass die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ (stückweise) stetig differenzierbar sind.

Bemerkung. Jeder Parameterwert t liefert also einen Punkt P der Ebene mit den Koordinaten $(x(t), y(t))$.

Umgekehrt ist es oft wichtig, dass jedem Kurvenpunkt auch genau ein Parameterwert entspricht.

Bei $x(t) = R\cos t$, $y(t) = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$ entspricht jedem Punkt der Kreislinie genau ein Parameterwert.

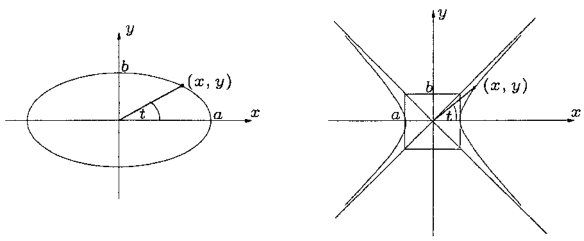
Mittels $x(t) = R\cos 2t$, $y(t) = R\sin 2t$, $t \in [0, 2\pi)$ wird ebenfalls die Kreislinie beschrieben, allerdings wird der Kreis zweimal durchlaufen!

Eine Parameterdarstellung liefert wegen $t \in [a, b]$ einen **Durchlaufsinn** bzw. Durchlaufrichtung, und eine **Durchlaufgeschwindigkeit**.

Beispiel. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist die Gleichung einer Ellipse.

Offenbar ist $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$ eine Parameterdarstellung der Ellipse, weil

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1\ .$$



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist die Gleichung einer Hyperbel.

Offenbar ist $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$ eine Parameterdarstellung der Hyperbel, weil

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \ .$$

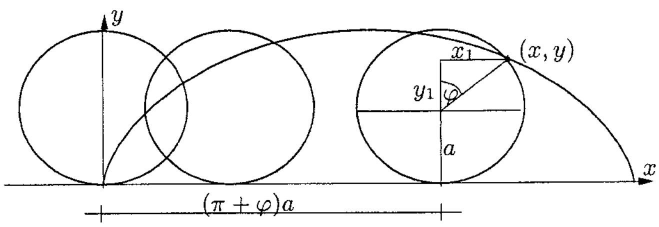
Bemerkung. Ohne Beweis sei erwähnt, dass der Parameter t den Flächeninhalt des Hyperbelsektors darstellt,

$$t = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} \quad \text{bzw.} \quad t = \operatorname{arsinh} \frac{y}{b}$$

Aus diesem Grund werden die Umkehrfunktionen zu den hyperbolischen Funktionen auch Area-Funktionen genannt.

Beispiel. Ein Kreis soll gleitfrei auf der $x-$Achse abgerollt werden. Betrachtet man einen Punkt (x, y) auf dem Kreis, so beschreibt er während dieses Vorgangs eine Kurve, die **Zykloide** genannt wird.

Wir betrachten z.B. den Fall, dass der Kreis um den Winkel $t = \pi + \varphi$ weitergerollt wurde.



$$x_1 = a \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad x = (\pi + \varphi)a + x_1 = (\pi + \varphi)a + a \sin \varphi$$

$$y_1 = a \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad y = a + a \cos \varphi = a(1 + \cos \varphi)$$

Mit $t = \pi + \varphi$ folgt nun

$$\cos \varphi = \cos(t - \pi) = -\cos t \quad , \quad \sin \varphi = -\sin(\pi - t) = -\sin t$$

Folglich erhalten wir als Parameterdarstellung für die Zykloide

$$x = a \cdot (t - \sin t) \quad , \quad y = a \cdot (1 - \cos t)$$

Bemerkung. Bei der Parameterdarstellung einer ebenen Kurve können wir die beteiligten Funktionen als Komponenten eines Vektors auffassen.

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad , \ t \in [a, b]$$

Die **Ableitung** dieser Vektorfunktion ist definiert als

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Von den komplexen Zahlen her ist weiters die **Polardarstellung** mittels der Polarkoordinaten (r, φ) bekannt. Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist durch

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi \qquad \text{bzw.}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \tan\varphi = \tfrac{y}{x} \ \Rightarrow \ \varphi = \arctan\tfrac{y}{x}$$

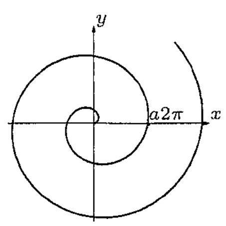
gegeben.

Eine ebene Kurve kann somit auch in Polarkoordinaten durch $r = r(\varphi)$ gegeben sein.

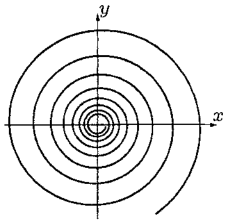
Beispiel. Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = R^2$ schreibt sich in Polarkoordinaten

$$R^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = R \quad \forall\ \varphi$$

Beispiel. Die **Archimedische Spirale** hat die Gleichung $r = a\varphi$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ist und $\varphi \geq 0$.



Beispiel. Die **Logarithmische Spirale** hat die Gleichung $r = e^{-a\varphi}$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ist und $\varphi \geq 0$.



Wir beobachten, dass $\lim\limits_{\varphi \to \infty} r = \lim\limits_{\varphi \to \infty} \frac{1}{e^{a\varphi}} = 0$.

Wir interessieren uns nun für die **Steigung** k der Tangente an einen Kurvenpunkt $P(x, y)$.

Liegt die Darstellung $y = y(x)$ vor, dann ist $k = y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Im Falle einer Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

ein Vektor, der in Tangentenrichtung weist.

Kann die Kurve (lokal) auch in der Form $y = y(x)$ geschrieben werden, gilt

$$k = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Bemerkung. Für $\dot{x} = 0$, $\dot{y} \neq 0$ liegt eine vertikale Tangente vor, und für $\dot{x} \neq 0$, $\dot{y} = 0$ eine horizontale Tangente.

Für $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ existiert keine Tangente, man spricht von **singulären Punkten**.

Beispiel. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ist die Parameterdarstellung einer Zykloide.

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

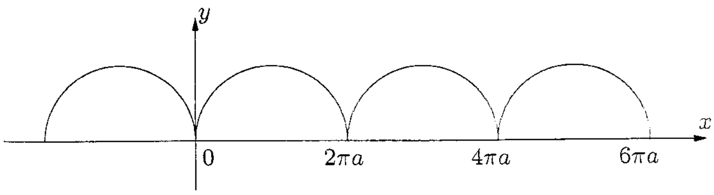
Die singulären Punkte sind durch die Gleichungen

$1-\cos t=0$, $\sin t=0$ gegeben.

$1-\cos t=0 \;\Leftrightarrow\; \cos t=1 \;\Rightarrow\; t=2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

$\sin t=0 \;\Rightarrow\; t=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$

Insgesamt also für $t=0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi,\ldots$



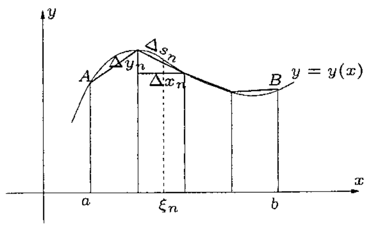
Aus der Grafik sehen wir, dass an der Stelle $P(0,0)$ (sowie an allen weiteren Stellen $(2na\pi,0)$ $n\in\mathbb{Z}$) eine Spitze vorliegt, was sich auch ergibt aus

$$\lim_{t\to 0^+} k=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{1-\cos t}=\left(\tfrac{0}{0}\right)\overset{l'Hosp}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t}{\sin t}=+\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0^-} k=-\infty$$

Nun betrachten wir das Problem der **Bogenlänge einer Kurve**.

Sei eine Kurve in der Form $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ gegeben. Wir wollen die Bogenlänge der Kurve vom Punkt $A(a,f(a)$ zum Punkt $B(b,f(b)$ bestimmen.

Diese kann angenähert werden durch die Länge eines approximierenden Polygonzuges.



$$\Delta x_n=x_n-x_{n-1} \quad , \quad \Delta y_n=y_n-y_{n-1}=f(x_n)-f(x_{n-1})$$

$$\Delta s_n^2 = \Delta x_n^2 + \Delta y_n^2 = (1 + (\tfrac{\Delta y_n}{\Delta x_n})^2) \cdot \Delta x_n^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta s_n = \sqrt{1 + (\tfrac{\Delta y_n}{\Delta x_n})^2} \cdot \Delta x_n$$

Für die gesuchte Bogenlänge s folgt damit

$$s \approx \sum_{n=1}^{N} \Delta s_n = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + (\tfrac{\Delta y_n}{\Delta x_n})^2} \cdot \Delta x_n$$

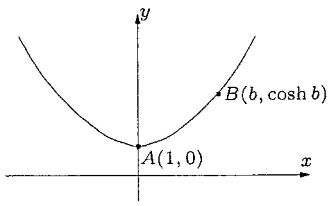
Unter Anwendung des Mittelwertsatzes entspricht der Differenzenquotient $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ genau der Ableitung $y'(\xi_n)$ an einer Zwischenstelle $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$, also

$$s \approx \sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + (y'(\xi_n))^2} \cdot \Delta x_n$$

Dies stellt wiederum eine Riemann'sche Summe dar, deren Grenzwert das Integral

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad \text{liefert.}$$

Beispiel. Gesucht ist die Bogenlänge von $y = \cosh x$ (Kettenlinie) im Intervall $[0, b]$.



$$y' = \sinh x \;\; \Rightarrow \;\; s = \int_0^b \sqrt{1 + \sinh^2 x} \; dx = \int_0^b \cosh x \; dx = \sinh x \,|_0^b = \sinh b$$

Ist die Kurve in einer Paramterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben, verwenden wir die Substitution $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ und $dx = \dot{x} dt$. Gilt $a = x(\alpha)$ und $b = x(\beta)$, erhalten wir

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \; dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (\tfrac{\dot{y}}{\dot{x}})^2} \; \dot{x} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \; dt = \int_\alpha^\beta |\dot{\vec{x}}(t)| \; dt$$

Der Integrand ist also die Länge des Tangentialvektors!

Bemerkung. Eine Kurve $\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in [a, b]$ heißt **glatt**, wenn die Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ stetige Funktionen sind.

In diesem Fall kann die Bogenlänge s als Funktion des Parameters t (= Länge der Kurve vom Punkt $\vec{x}(a)$ zu einem beliebigen Punkt $\vec{x}(t)$) angegeben werden durch

$$s(t) = \int\limits_a^t |\dot{\vec{x}}(u)| \, du \qquad \text{(und es gilt dann } \tfrac{ds}{dt} = |\dot{\vec{x}}(t)|\text{)}$$

Ist die Kurve in Polardarstellung (dies ist eine spezielle Parameterdarstellung) gegeben, erhalten wir (Herleitung siehe Skriptum)

$$s = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} \, d\varphi$$

Beispiel. Sei $r = e^{-\varphi}$ (logarithmische Spirale).

$$s = \int\limits_0^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} \, d\varphi = \int\limits_0^b \sqrt{e^{-2\varphi} + e^{-2\varphi}} \, d\varphi = \sqrt{2} \int\limits_0^b e^{-\varphi} \, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}(-e^{-\varphi}) \Big|_0^b = \sqrt{2}(1 - e^{-b})$$

Die Gesamtlänge ist

$$s = \int\limits_0^\infty \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} \, d\varphi = \lim_{b \to \infty} \int\limits_0^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} \, d\varphi = \lim_{b \to \infty} \sqrt{2}(1 - e^{-b}) = \sqrt{2}$$

Beispiel. Berechne die Bogenlänge eines Bogens der Zykloide

$$x = a(t - \sin t) \ , \ y = a(1 - \cos t) \ , \ 0 \le t \le 2\pi \ .$$

$\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a \sin t \quad \Rightarrow$

$$s = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \, dt = a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \, dt =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\; dt$$

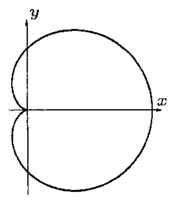
Wir verwenden nun die trigonometrische Formel

$$1-\cos t = 2\sin^2\tfrac{t}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2}\cdot|\sin\tfrac{t}{2}|$$

Für $0 \le t \le 2\pi$ ist $0 \le \frac{t}{2} \le \pi$, und dort ist der Sinus positiv, also können wir die Betragstriche weglassen und erhalten

$$s = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin\tfrac{t}{2}\; dt = 2a\cdot 2(-\cos\tfrac{t}{2})\,\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

Beispiel. Bestimme die Bogenlänge von $r = a(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (**Kardoide**, Herzkurve)



Mit $\dot{r} = -a\sin\varphi$ folgt

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{r}^2+r^2}\; d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\; d\varphi =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\varphi}\; d\varphi$$

Wegen $1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{1+\cos\varphi} = \sqrt{2}|\cos\frac{\varphi}{2}|$ folgt

$$s = 2a\int_0^{2\pi} |\cos\tfrac{\varphi}{2}|\; d\varphi = 2a\Big(\int_0^{\pi} \cos\tfrac{\varphi}{2}\; d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} (-\cos\tfrac{\varphi}{2})\; d\varphi\Big) =$$

$$= 2a\cdot\Big(2\sin\tfrac{\varphi}{2}\,\Big|_0^{\pi} + (-2\sin\tfrac{\varphi}{2})\,\Big|_{\pi}^{2\pi}\Big) = 8a$$

Beachtet man die Symmetrieeigenschaften der Kurve, kann einfacher gerechnet werden

$$s = 2\cdot 2a\int_0^{\pi} \cos\tfrac{\varphi}{2}\; d\varphi = 4a\cdot 2\sin\tfrac{\varphi}{2}\,\Big|_0^{\pi} = 8a$$

Eine weitere Eigenschaft einer ebenen Kurve ist ihre **Krümmung**.

Wir betrachten eine glatte Kurve $\vec{x}(s)$ mit der Bogenlänge s als Parameter.

Dann stellt sich heraus, dass $\vec{x}'(s) = \vec{t}$ der normierte Tangentenvektor ist (also der Tangentenvektor mit Länge 1).

Die **Krümmung** κ ist ein Maß für die Änderung des normierten Tangentenvektors bezüglich der Bogenlänge und definiert durch

$$\kappa(s) = |\tfrac{d\vec{t}}{ds}| = |\vec{t}'(s)| = |\vec{x}''(s)|$$

Für eine beliebige Parameterdarstellung $\vec{x}(t)$ ist $\vec{t} = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|}\dot{\vec{x}}(t)$.

Wegen $\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ ist $\kappa(t) = \left| \frac{\frac{d\vec{t}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right| = \frac{|\dot{\vec{t}}(t)|}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$

Beispiel. Man bestimme die Krümmung des Kreises $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$, wobei $0 \le t \le 2\pi$.

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{t}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{t}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Wegen $|\dot{\vec{x}}(t)| = R$ und $|\dot{\vec{t}}(t)| = 1$ ist $\kappa(t) = \frac{1}{R}$.

Satz.

1) Für eine Kurve in (allgemeiner) Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ist die Krümmung gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

2) Für eine Kurve in expliziter Darstellung $y = f(x)$ ist die Krümmung gegeben durch

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$$

Beispiel. Für die Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$ bestimme man die Krümmung in den Punkten $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ sowie jene Stellen, wo die Krümmung extremal ist.

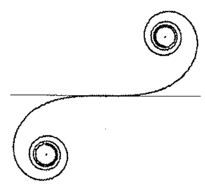
$y' = \frac{1}{2}x \quad , \quad y'' = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \kappa(x) = \frac{\frac{1}{2}}{(1+\frac{x^2}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Damit $\kappa(0) = \frac{1}{2} \quad , \quad \kappa(1) = \frac{4}{5^{\frac{3}{2}}} \approx 0.358$

$\kappa(x)$ extremal $\Rightarrow \quad \kappa'(x) = -\frac{12x}{(4+x^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

Beispiel. (**Klothoide** oder **Cornu-Spirale**)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^t \cos \frac{\pi u^2}{2} du \\ \int\limits_0^t \sin \frac{\pi u^2}{2} du \end{pmatrix} \quad , \; t \in \mathbb{R}$$



$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t^2}{2} \\ \sin \frac{\pi t^2}{2} \end{pmatrix} .$$

Damit ist die Bogenlänge von $t = 0$ bis $t = a > 0$ gegeben durch

$$s = \int\limits_0^a \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\; dt = \int\limits_0^a dt = a$$

Für die Berechnung der Krümmung gilt

$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan \frac{\pi t^2}{2}$

$y''(x) = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx}) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\pi t}{\cos^3 \frac{\pi t^2}{2}}$

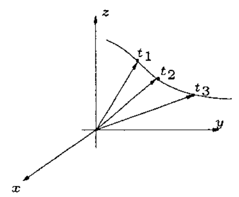
Folglich ist $\kappa = \frac{|y''|}{|1+(y')^2|^{\frac{3}{2}}} = \ldots = \pi t$

Dies bedeutet, dass die Krümmung linear mit t zunimmt.

In analoger Weise stellt die vektorwertige Funktion

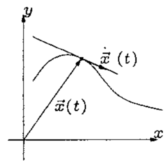
$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad , \ t \in [a, b]$$

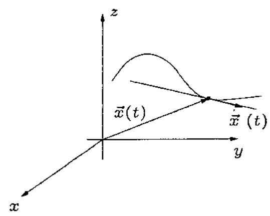
wobei die (Komponenten-)Funktionen stückweise stetig differenzierbar sind, eine **Raumkurve** dar.



Die **Ableitung** der Vektorfunktion $\vec{x}(t)$ ist erklärt durch

$$\frac{d}{dt}\, \vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$





Bemerkung. Der Vektor $\dot{\vec{x}}(t)$ ist ein Vektor, der in Richtung der Tangente weist.

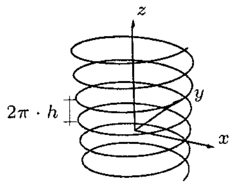
Wird die Variable t als Zeit interpretiert, dann ist $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ der **Geschwindigkeitsvektor** und die Momentangeschwindigkeit ist durch $|\vec{v}(t)|$ gegeben.

Die **Bogenlänge** einer Raumkurve $\vec{x}(t)$ ist erklärt durch

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\vec{x}}(t)|\ dt$$

Beispiel. Die **Schraubenlinie** hat die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ h \cdot t \end{pmatrix} \quad , \text{ wobei } a, h \text{ Konstante sind.}$$



Die Ganghöhe ist offenbar $2\pi h$.

Ist $a = 0$, erhalten wir eine Gerade ($z-$Achse) . Ist $h = 0$, dann entspricht die Schraubenlinie der Kreislinie in der $xy-$Ebene.

Für die (allgemeine) Bogenlänge ergibt sich

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\; dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + h^2}\; dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 + h^2}\; dt = \sqrt{a^2 + h^2} \cdot t \,\Big|_{t_0}^{t_1}$$

Speziell ist die Bogenlänge für einen Gang (einen Umlauf) damit

$$s = \sqrt{a^2 + h^2} \cdot t \,\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + h^2}$$