# 04. Allgemeine Vektorräume

**Definition.** Ein **Vektorraum** (oder auch **linearer Raum**) ist eine beliebige nichtleere Menge $V$ von Objekten (welche dann **Vektoren** genannt werden), für die eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren (meist aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) erklärt ist.

Die zuvor genannten Rechenregeln betreffend Addition und Multiplikation mit Skalaren müssen analog erfüllt sein.

**Beispiel.** $\mathbb{R}^2$ , $\mathbb{R}^3$ , $\mathbb{R}^n$ (siehe zuvor)

**Beispiel.** Sei $X$ eine Menge und $F(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller Abbildungen (Funktionen) von $X$ nach $\mathbb{R}$ .

Für $f, g \in F(X, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erklären wir die Funktionen $f + g$ und $\lambda f$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Dann ist $F(X, \mathbb{R})$ ein Vektorraum. Der Nullvektor ist hier die Nullfunktion, die jedem $x \in X$ den Wert Null zuordnet.

**Definition.** Ein **Teilraum** (oder auch **Untervektorraum**) eines Vektorraumes $V$ ist eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\vec{x}, \vec{y} \in U \quad \Rightarrow \quad \vec{x} + \vec{y} \in U$
2. $\vec{x} \in U$ , $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \vec{x} \in U$

(D.h. bei der Addition von zwei Vektoren aus $U$ und der skalaren Multiplikation eines Vektors aus $U$ wird der Teilraum nicht verlassen.)

**Bemerkung.** Ein Teilraum ist selbst wieder ein Vektorraum.

**Beispiel.** Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ , die den Ursprung enthält, ist ein Teilraum.

Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ , die den Ursprung enthält, ist ein Teilraum.

**Definition.** Sei $V$ ein Vektorraum (mit Skalaren aus $\mathbb{R}$)

1. Seien $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ . Dann heißt der Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ .

2. Die Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in V$ heißen **linear unabhängig**, wenn gilt

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Das bedeutet, dass sich der Nullvektor **nur auf triviale Weise**, also mit $\lambda_i = 0 \ \ \forall\ i$ darstellen lässt.

Umgekehrt heißen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ **linear abhängig** wenn sie nicht linear unabhängig sind, es also eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors gibt.

**Beispiel.** Gegeben seien $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

impliziert $\quad 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \ \ , \ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Die beiden Vektoren sind damit linear unabhängig.

**Beispiel.** Die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
sind linear abhängig, weil

$$2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 - \vec{x}_3 = \vec{0} \ .$$

**Bemerkung.** Ist $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}$ und sind die Vektoren

$\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ linear abhängig, dann existiert ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\lambda_i \neq 0$ und folglich gilt

$$\vec{x}_i = -\tfrac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1}\vec{x}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \vec{x}_k) \ .$$

D.h. einer der Vektoren lässt sich als Linearkombination der übrigen darstellen.

Gilt also etwa $2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 - \vec{x}_3 = \vec{0}$ , dann erhält man

$$\vec{x}_1 = -\tfrac{1}{2}(3\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \ , \quad \vec{x}_2 = -\tfrac{1}{3}(2\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \ , \quad \vec{x}_3 = 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2$$

**Bemerkungen.**

1. Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ sind **immer** linear abhängig.

2. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind, d.h. einer der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen.

3. Drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen, die den Ursprung enthält.

4. Ist für $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ der Vektor $\vec{x}_i = \vec{0}$ , dann sind die Vektoren linear abhängig, weil

$$0 \cdot \vec{x}_1 + \ldots 0 \cdot \vec{x}_{i-1} + 1 \cdot \vec{x}_i + 0 \cdot \vec{x}_{i+1} + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_k = \vec{0}$$

**Definition.**

1. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum $V$ heißt die **Dimension** von $V$ , $\dim V$ .

2. Ist $\dim V = m$ , dann heißt ein System $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ von linear unabhängigen Vektoren eine **Basis** von $V$ .

**Bemerkung.** Ein und derselbe Vektorraum kann viele verschiedene Basen haben.

**Bemerkung.** Im $\mathbb{R}^n$ ist

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \ldots , \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die sogenannte **Standardbasis** (bzw. **kanonische Basis**).

**Definition.** Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ Vektoren des Vektorraums $V$ . Die Menge aller Linearkombinationen $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k$ mit beliebigem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ heißt der von den Vektoren $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ **aufgespannte Raum** bzw. der **Span** von $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ .

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = \{\vec{v} \ : \ \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k \ , \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

**Bemerkung.** $\text{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ ist wieder ein Vektorraum.

**Satz.** Ist $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ eine Basis des Vektorraums $V$ , dann lässt sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ in **eindeutiger** Weise als Linearkombination der Basisvektoren schreiben.

**Beispiel.** Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ , $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Dann ist $(\vec{a}, \vec{b})$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ .

Bezüglich der kanonischen Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ gilt

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 5 \cdot \vec{e}_2$$

Bezüglich der Basis $(\vec{a}, \vec{b})$ gilt

$$\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Definition.** Eine Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ heißt eine **Orthonormalbasis (ONB)**, wenn die Basisvektoren paarweise orthogonal aufeinander stehen und normiert sind (d.h. die Länge 1 haben). D.h.

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad i = j \\ 0 & \text{wenn} \quad i \neq j \end{cases}$$

Gegeben sei nun ein System von $m$ linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$ im Vektorraum $V$ . Sei $W = \text{Span}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m)$ . Dann ist $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m)$ eine Basis von $W$ .

Im **Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt** wird daraus eine Orthonormalbasis $(\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_m)$ von $W$ konstruiert.

**1. Schritt:** Bilde den Vektor $\vec{b}^*_1 = \vec{b}_1$ und weiters sukzessive

$$\vec{b}^*_k = \vec{b}_k - \frac{\langle \vec{b}_k, \vec{b}^*_1 \rangle}{\langle \vec{b}^*_1, \vec{b}^*_1 \rangle} \cdot \vec{b}^*_1 - \frac{\langle \vec{b}_k, \vec{b}^*_2 \rangle}{\langle \vec{b}^*_2, \vec{b}^*_2 \rangle} \cdot \vec{b}^*_2 - \ldots - \frac{\langle \vec{b}_k, \vec{b}^*_{k-1} \rangle}{\langle \vec{b}^*_{k-1}, \vec{b}^*_{k-1} \rangle} \cdot \vec{b}^*_{k-1} \quad , \quad k = 2, \ldots m$$

$(\vec{b}^*_1, \ldots, \vec{b}^*_m)$ bilden dann ein orthogonales System.

**2. Schritt:** Die erhaltenen Vektoren werden nun normiert

$$\vec{b}'_i = \frac{\vec{b}^*_i}{|\vec{b}^*_i|} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

und wir erhalten die gesuchte Orthonormalbasis für $W$ .