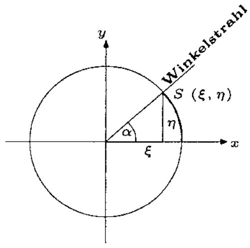
17. Trigonometrische Funktionen

Die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Radius r lautet bekanntlich $x^2 + y^2 = r^2$. Weiters ist der Flächeninhalt mit $A = r^2\pi$ und der Umfang mit $U = 2r\pi$ gegeben.

Ist $r = 1$ sprechen wir vom **Einheitskreis**.



Die **positive Orientierung** des Einheitskreises ist dadurch gegeben, dass wir den Kreis beginnend vom Punkt $(1,0)$ **entgegen** dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Erfolgt der Durchlauf im Uhrzeigersinn, sprechen wir von der negativen Orientierung.

Betrachten wir nun einen Punkt $S(\xi,\eta)$ auf dem Einheitskreis und den entsprechenden Winkelstrahl vom Ursprung zu S .

Bei positiver Orientierung kann der Winkel α im **Gradmaß** (wobei der volle Kreis den Winkel $360°$ hat) oder im **Bogenmaß** (Länge des Kreisbogens vom Punkt $(1,0)$ bis zum jeweiligen Punkt im Gegenuhrzeigersinn) angegeben werden.

Die Umrechnung eines Winkels β im Gradmaß ins Bogenmaß erfolgt gemäß der Formel

$$\alpha = \tfrac{\beta\pi}{180} \; .$$

Damit gilt etwa $180° \simeq \pi$, $45° = \frac{\pi}{4}$ etc.

Bemerkung. Betrachten wir den Punkt $(0,-1)$. Bei positiver Orientierung entspricht diesem Punkt der Winkel $270°$ bzw. $\frac{3\pi}{2}$.

Bei negativer Orientierung ergibt sich $90°$ bzw. $\frac{\pi}{2}$.

Wir können damit "negative Winkel" definieren, indem wir diesem Punkt die Winkel $-90°$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ zuordnen (innerhalb der positiven Orientierung).

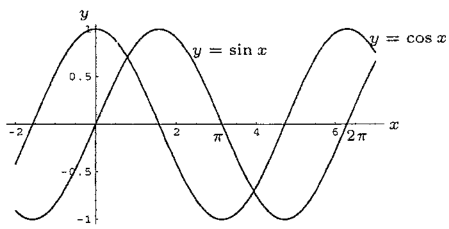
Durch mehrmaliges Durchlaufen des Einheitskreises in positiver bzw. negativer Richtung beobachten wir weiters, dass durch die Winkel $\alpha° \pm k \cdot 360°$ bzw. $\alpha \pm k \cdot 2\pi$ derselbe Punkt auf dem Einheitskreis definiert wird.

Wir betrachten nun den Einheitskreis und der Winkel α sei im Bogenmaß angegeben.

Definition. Die $x-$Koordinate ξ des Schnittpunktes S des Winkelstrahles mit dem Einheitskreis, wird **Cosinus von** α , $\cos\alpha$, genannt, die $y-$Koordinate η wird mit **Sinus von** α , $\sin\alpha$, bezeichnet.

Folgerung.

$$\cos(\alpha \pm k \cdot 2\pi) = \cos\alpha \quad \text{und} \quad \sin(\alpha \pm k \cdot 2\pi) = \sin\alpha \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$



Definition. Eine Funktion f ist **periodisch**, wenn es eine positive Zahl p gibt, sodass $f(x \pm p) = f(x)$ für alle x ist. Der kleinste Wert p dieser Art ist die **Periode** von f .

Bemerkung. $\cos x$ und $\sin x$ sind also periodische Funktionen mit der Periode 2π .

Eigenschaftden der Sinus- bzw. Cosinusfunktion

1) $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

2) Die Nullstellen des Sinus sind $x_k = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$, also

$$\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

Die Nullstellen des Cosinus sind $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$, also

$$\ldots, -\tfrac{3\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2}, \ldots$$

3) (**Periodizität**)

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad , \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad , \ k \in \mathbb{Z}$$

4) Der Sinus ist eine ungerade Funktion, i.e. $\sin(-x) = -\sin x$, der Cosinus ist eine gerade Funktion, i.e. $\cos(-x) = \cos x$.

5) (**Einige Summensätze**)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

6) (**Ableitungen**)

$$(\sin x)' = \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Definition. (**Tangens** und **Cotangens**)

$$\tan x = \tfrac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \tfrac{\cos x}{\sin x}$$

Eigenschaften.

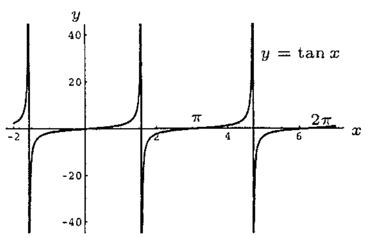
1) $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

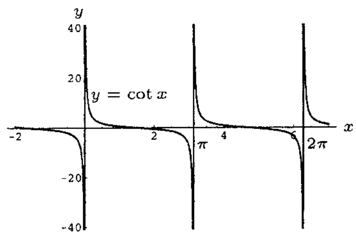
2) $\mathbb{D}_{\text{Tangens}} = \mathbb{R} \setminus \{x \ : \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{D}_{\text{Cotangens}} = \mathbb{R} \setminus \{x \ : \ x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

3) Periodisch mit der Periode π

$$\tan(x+k\pi)=\tan x \quad , \quad \cot(x+k\pi)=\cot x \ , \ k\in\mathbb{Z}$$





4) (**Monotonie**)

Der Tangens ist streng monoton steigend für $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

Der Cotangens ist streng monoton fallend für $0<x<\pi$.

5) Beide Funktionen sind ungerade (schiefsymmetrisch).

6) (**Ableitungen**)

$$(\tan x)'=(\tfrac{\sin x}{\cos x})'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)'=(\tfrac{\cos x}{\sin x})'=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$