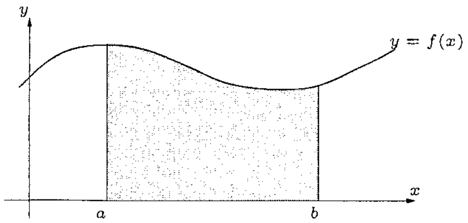
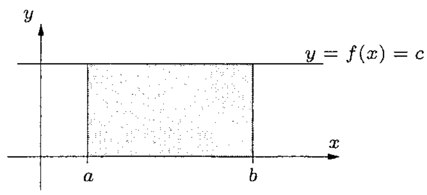
21. Das bestimmte Integral

Wir betrachten eine Kurve $y = f(x)$ mit $f(x) \geq 0$ auf dem Intervall $[a, b]$.

Obwohl der Flächeninhalt eines Rechteckes (und in weiterer Folge eines Dreieckes und anderer elementarer geometrischer Figuren) als bekannt vorgesetzt werden kann, ist vorderhand nicht klar, wie der Flächeninhalt unterhalb einer krummlinigen Kurve definiert werden kann.





Bemerkung. Im Falle $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir ein Rechteck mit Flächeninhalt $A = (b - a) \cdot c$.

Der allgemeine Fall wird zurčkgeführt auf die Bestimmung von gewissen Rechtecksflächen und anschließender Grenzwertbildung.

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

Sei $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ für $n = 1, 2, \ldots, N$.

Dann ist $[a, b] = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_N$.

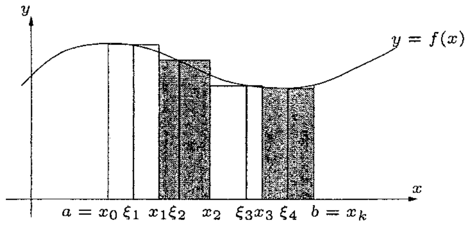
Die Länge des Teilintervalls I_n ist dann $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

Wir wählen nun in jedem Teilintervall einen Zwischenwert

$$\xi_n \in I_n = [x_{n-1}, x_n]$$

und bestimmen den Flächeninhalt des Rechteckes über dem Teilintervall mit Höhe $f(\xi_n)$. Dieser ist dann

$$A_n = f(\xi_n) \cdot \Delta x_n \ .$$



Der gesuchte Flächeninhalt A unter der Kurve wird nun durch die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Teilrechtecke approximiert:

$$A \approx \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \cdot \Delta x_n$$

Definition. Die **Feinheit** $L(Z)$ einer gegebenen Zerlegung

$$Z \ : \ a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_N = b$$

ist die maximale Intervalllänge, i.e. $L(Z) = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} \Delta x_n$.

Der Flächeninhalt wird also angenähert durch

$$R(f; Z; \xi_1, \ldots, \xi_N) = \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \cdot \Delta x_n$$

wobei diese Summe als **Riemann'sche Summe** für die Funktion $f(x)$, mit der Zerlegung Z und den Zwischenpunkten $\xi_1, \ldots, \xi_N$ bezeichnet wird.

Bei der **äquidistanten Zerlegung** wird das Intervall $[a, b]$ in k gleich große Teilintervalle zerlegt. Wir erhalten

$$\Delta x_n = \tfrac{b-a}{k} \quad \forall \, n \qquad \text{und folglich} \qquad L(Z^{(k)}) = \tfrac{b-a}{k} \ .$$

Bei der **Zerlegung durch forlaufende Halbierung** ergibt sich

$$\Delta x_n = \tfrac{b-a}{2^k-1} \quad \forall \, n \qquad \text{und folglich} \qquad L(Z^{(k)}) = \tfrac{b-a}{2^k-1} \ .$$

Daneben gibt es natürlich viele beliebige Zerlegungen.

Definition. Eine Folge $(Z^{(k)})$ von Zerlegungen heißt **ausgezeichnete**

Zerlegungsfolge wenn

$$\lim_{k\to\infty} L(Z^{(k)}) = 0$$

Bemerkung. Sowohl die äquidistante, als auch die Zerlegung durch fortlaufende Halbierung sind ausgezeichnete Zerlegungsfolgen.

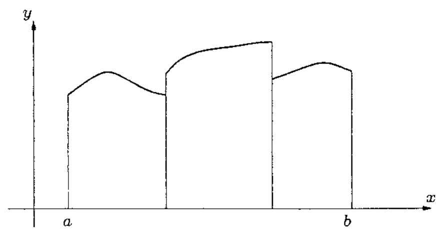
Definition. Das **bestimmte Integral** einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ bzgl. einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge $(Z^{(k)})$ und Zwischenpunkten $\xi_n^{(k)}$ ist der Grenzwert (falls existent!)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} R(f; Z^{(k)}; \xi_1^{(k)}, \dots \xi_{N_k}^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N_k} f(\xi_n^{(k)}) \cdot \Delta x_n^{(k)}$$

$f(x)$ heißt **integrierbar** im Riemann'schen Sinn auf $[a,b]$, wenn **für jede** ausgezeichnete Zerlegungsfolge obiger Grenzwert existiert und den gleichen Wert ergibt.

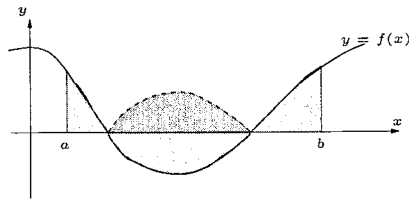
Satz. Jede auf dem Intervall $[a,b]$ stückweise stetige Funktion f ist integrierbar.

(Stückweise stetig heißt dass sich die Funktion aus endlich vielen stetigen Stücken zusammensetzen lässt und an den Unstetigkeitsstellen nur Sprungstellen auftreten.)



Bemerkung. Falls $f(x) \geq 0$, dann ist $\int_a^b f(x)dx$ (per definition) der Flächeninhalt unter der Kurve im Intervall $[a,b]$.

Im allgemeinen Fall kann $f(\xi_n^{(k)}) < 0$ sein und wir erhalten "negative" Rechtecksflächen. Für den Flächeninhalt zwischen Kurve und $x-$Achse ist daher $\int_a^b |f(x)|dx$ zu betrachten.



Spezielle Riemann'sche Summen erhalten wir, wenn wir **Obersummen** und **Untersummen** betrachten.

Betrachte $Z \ : \ a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_N = b$.

Sei ξ_n jener Wert aus I_n wo $f(\xi_n) = \max\limits_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x)$ (bzw. $f(\xi_n) = \min\limits_{x_{n-1} \le x \le x_n} f(x)$).

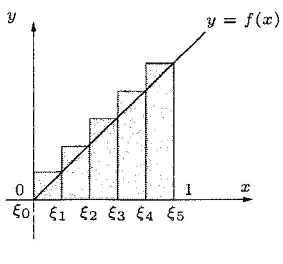
Im einen Fall ist $R^+(f; Z; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum\limits_{n=1}^{N} f(\xi_n) \cdot \Delta x_n$ die **Obersumme** bzgl. der Zerlegung Z . Im anderen Fall schreibt man $R^-(f; Z; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ und erhält die **Untersumme** bzgl. Z .

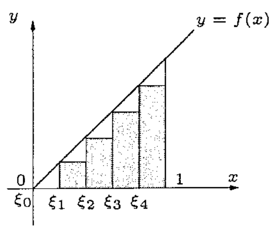
Satz. f ist integrierbar $\Leftrightarrow$ für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge konvergieren Obersummen und Untersummen gegen denselben Wert.

Beispiel. Wir betrachten $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $Z^{(k)}$ in äquidistante Teilintervalle $I_n = [\frac{n-1}{k}, \frac{n}{k}]$, $n = 1, \ldots, k$ mit Intervalllänge $\Delta x_n = \frac{1}{k}$.

Dann ist $f(\xi_n) = \max\limits_{x \in I_n} f(x) = \frac{n}{k}$ und $f(\xi_n^*) = \min\limits_{x \in I_n} f(x) = \frac{n-1}{k}$.





$$R^+(f; Z^{(k)}; \xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{n=1}^{k} f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{k} \cdot \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{k} n = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{k})$$

$$R^-(f; Z^{(k)}; \xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{n=1}^{k} f(\xi_n^*) \cdot \Delta x_n = \sum_{n=1}^{k} \frac{n-1}{k} \cdot \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{k} (n-1) = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})$$

Wir erhalten

$$\lim_{k\to\infty} R^+(f; Z^{(k)}; \xi_1, \dots, \xi_k) = \lim_{k\to\infty} R^-(f; Z^{(k)}; \xi_1, \dots, \xi_k) = \frac{1}{2}$$

Eigenschaften von bestimmten Integralen

1. $\int\limits_a^b c \cdot dx = (b-a) \cdot c \quad , \ c \in \mathbb{R}$

2. $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$

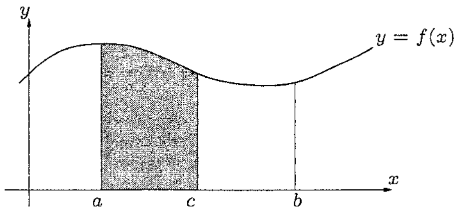
3. $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \int\limits_a^b f(x)dx$

4. $\int\limits_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x))dx = c_1 \int\limits_a^b f(x)dx + c_2 \int\limits_a^b g(x)dx$

5. Gilt $f(x) \leq g(x)$ auf $[a, b]$, dann $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

6. $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

7. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \quad , \ c \in [a, b]$



8. $\int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^a f(x)dx = 0$

9. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \quad , \ c \in \mathbb{R}$

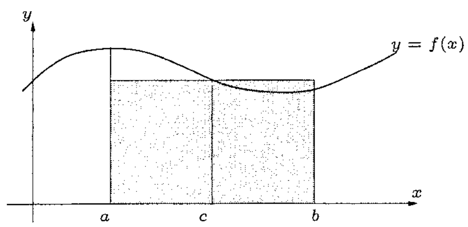
10. $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x) \quad , \ a \in \mathbb{R}$

Bemerkung. Setzen wir also $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, dann ist $F'(x) = f(x)$, also ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Im besonderen besitzt jede stetige Funktion eine Stammfunktion.

Satz. (**MWS der Integralrechnung**)

Ist f stetig auf dem Intervall $[a,b]$, dann existiert ein $c \in [a,b]$ mit der Eigenschaft

$$f(c) = \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$



Satz. (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**)

Sei f stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und sei F eine Stammfunktion von f, so gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\,|_a^b$$

Die **partielle Integration** für bestimmte Integrale kann in folgender Form angegeben werden

$$\int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x)\,|_a^b - \int\limits_a^b u'(x) \cdot v(x)dx$$

Beispiel. Betrachte $I = \int\limits_0^1 xe^x dx$

Setze $u = x$, $v' = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = 1$, $v = e^x$.

$$I = xe^x\,|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = (e - 0) - e^x\,|_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

Bei der **Substitutionsregel** für bestimmte Integrale gilt

$$\int\limits_{t=\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt = \int\limits_{u=a}^{b} f(u)du \quad , \ a = u(\alpha) \ , \ b = u(\beta)$$

Dabei muss $u(t)$ stetig und streng monoton sein.

Werden die Grenzen mitsubstituiert, erspart man sich die Rücksubstitution.

Beispiel. Betrachte $I = \int\limits_{x=1}^{3} 2\sqrt{2x+1}dx$

Substitution: $u = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}du$

Für die Grenzen gilt: $x_0 = 1 \leftrightarrow u_0 = 3$, $x_1 = 3 \leftrightarrow u_1 = 7$

$$I = \int\limits_{u=3}^{7} \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\,|_3^7 = \frac{2}{3}(7^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}})$$