

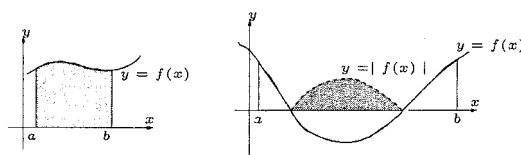
23. Anwendungen der Integralrechnung

1) Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der x -Achse

Sei $y = f(x)$.

Ist $f(x) \geq 0$ für $a \leq x \leq b$, dann ist $A = \int_a^b f(x) dx$.

Im allgemeinen Fall ist $A = \int_a^b |f(x)| dx$.



Man bestimmt zuerst die Nullstellen der Funktion und summiert dann die Absolutbeträge der einzelnen Integrale, die sich über die Teilintervalle von $[a, b]$ zwischen den Nullstellen erstrecken.

Beispiel. Betrachte die Kurve $y = f(x) = \sin x$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

Die Nullstellen sind an den Stellen $0, \pi$ und 2π .

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \left| \int_0^{\pi} \sin x dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \\ &= \left| -\cos x \Big|_0^{\pi} \right| + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = \left| -(-1 - 1) \right| + \left| -(1 - (-1)) \right| = 4 \end{aligned}$$

Eine weitere Möglichkeit wäre $A = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx$.

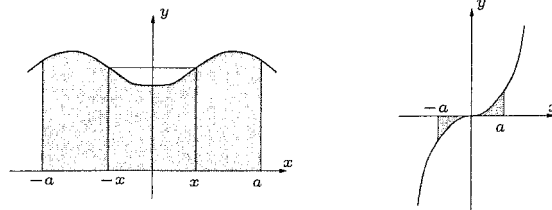
Bemerkung. Liegt ein symmetrisches Integrationsintervall $[-a, a]$ vor, dann gilt

- Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$, dann

$$A = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$, dann

$$A = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



2) Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

Definition. Ein Bereich

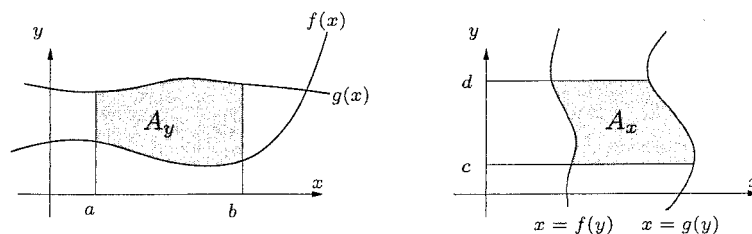
$$\{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

heißt **Normalbereich bzgl. der y -Richtung.**

Definition. Ein Bereich

$$\{(x, y) : c \leq y \leq d \text{ und } f(y) \leq x \leq g(y)\}$$

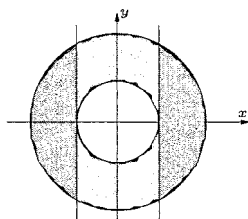
heißt **Normalbereich bzgl. der x -Richtung.**



Es gilt:

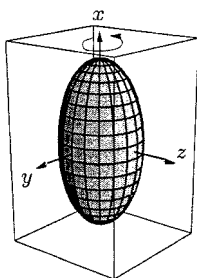
$$A_y = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \quad , \quad A_x = \int_c^d (g(y) - f(y)) dy$$

Bemerkung. Ist der Bereich kein Normalbereich, kann er oft in eine Vereinigung von Normalbereichen zerlegt werden, wie etwa beim Kreisring.



3) Volumen eines Drehkörpers

Wir betrachten die Rotation einer Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse bzw. um die y -Achse.



Sei Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit Zwischenwerten ξ_i . Die Rechtecke mit Länge Δx_i und Höhe $f(\xi_i)$ rotieren um die x -Achse und das Volumen der so entstandenen Scheibe ist $V_i = \pi \cdot (f(\xi_i))^2 \cdot \Delta x_i$.

Die Volumina dieser Scheiben werden aufsummiert und wir erhalten eine Approximation des gesuchten Volumens.

Als nächstes werden ausgezeichnete Zerlegungsfolgen (Z_i) betrachtet mit $L(Z_i) \rightarrow 0$.

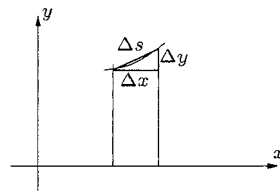
Durch Grenzübergang erhalten wir schließlich folgende Ausdrücke, wenn die Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse bzw. die Kurve $x = g(y)$ um die y -Achse rotiert

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad , \quad V_y = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$

4) Oberfläche eines Drehkörpers

Die Kurve $y = f(x)$ möge um die x -Achse rotieren. Wir suchen die Oberfläche des entstehenden Drehkörpers.

Dabei verwenden wir eine Approximation durch die entsprechenden Kurvensehnen.



Hier gilt

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x^2 \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right) \Rightarrow \Delta s = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x$$

Bei einer Zerlegung Z mit Zwischenpunkten ξ_i ergibt sich als Mantelfläche eines Kegelstumpfes

$$M_i = 2\pi \cdot f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x$$

Diese Mantelflächen werden aufsummiert und wir erhalten eine Approximation der gesuchten Oberfläche.

Durch ausgezeichnete Zerlegungsfolgen und Grenzübergang ergibt sich schließlich bei Rotation von $y = f(x)$ um die x -Achse die Oberfläche

$$O_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Bei Rotation von $x = \varphi(y)$ um die y -Achse erhalten wir als Oberfläche

$$O_y = 2\pi \int_a^b \varphi(y) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy$$

5) Numerische Integration

Es kommt vor, dass es nicht möglich ist, eine Stammfunktion von $f(x)$

zu bestimmen, um $\int_a^b f(x)dx$ zu bestimmen. Daher wurden verschiedene Näherungsverfahren entwickelt, die ohne Ermittlung einer Stammfunktion auskommen.

- Bei der **Rechtecksregel** verwendet man eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$ mit Zwischenpunkten x_i . Weiters soll f stetig differenzierbar sein. Wir erhalten dabei die Riemannsche Summe

$$R_N(f, Z) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Eine Fehlerabschätzung ergibt

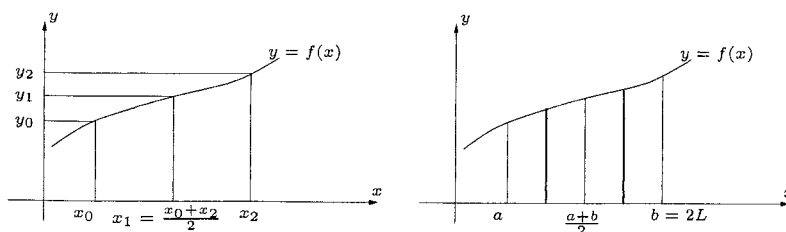
$$|R_N(f, Z) - \int_a^b f(x)dx| \leq \text{const} \cdot \frac{1}{N}$$

Man bezeichnet die Rechtecksregel auch als **Verfahren 1. Ordnung**, da der Fehler indirekt proportional zu N ist.

- Ausgangspunkt für die **Simpson'sche Regel** ist die sogenannte Kepler'sche Fassformel, bei der das Intervall $[a, b]$ in nur zwei Teilintervalle zerlegt wird,

$$Z : a = x_0 < x_1 = \frac{a+b}{2} < x_2 = b$$

$$A = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



Bei Berechnung nach der Simpsons'schen Regel wird das Intervall $[a, b]$ in $2L$ äquidistante Teilintervalle zerlegt. Auf jedes dieser Teilintervalle wird die Kepler'sche Fassregel angewendet. Eine Voraussetzung dabei ist, dass die Funktion f dreimal stetig differenzierbar ist.

$$A_L = \frac{b-a}{6L} \cdot (y_0 + y_{2L} + 4y_1 + 4y_3 + \dots + 4y_{2L-1} + 2y_2 + 2y_4 + \dots + 2y_{2L-2})$$

Der Fehler ergibt sich aus

$$\left| A_L - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \text{const}(f) \cdot \frac{1}{L^4} \quad \text{mit}$$

$$\text{const}(f) = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)| \frac{(b-a)^5}{2880}$$

Bemerkung. Für Polynome dritten Grades ergibt sich somit bereits eine **exakte** Bestimmung des Flächeninhaltes.