29. Taylorpolynome - Taylorreihen

Bislang haben wir eine Funktion $f(x)$ in einer Umgebung eines Punktes x_0 lediglich durch eine lineare Funktion (Differential), also ein Polynom ersten Grades, approximiert.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \varphi_1(x) = P_1(x, x_0)$$

Dabei gilt: $\varphi_1(x_0) = f(x_0)$, $\varphi_1'(x_0) = f'(x_0)$

Ist $f(x)$ im betrachteten Intervall genügend oft differenzierbar, können wir $f(x)$ das **Taylorpolynom $n-$ter Ordnung** mit dem Entwicklungspunkt x_0 zuordnen.

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Setzen wir $\varphi_n(x) = P_n(x, x_0)$, dann gilt

$$\varphi_n(x_0) = f(x_0) \ , \ \varphi_n'(x_0) = f'(x_0) \ , \ \ldots \ , \ \varphi_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

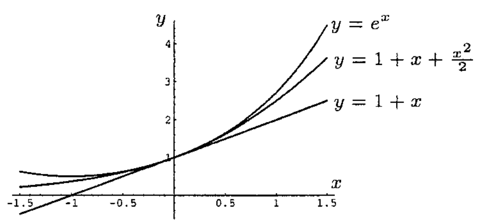
$$\varphi_n^{(n+1)}(x) = 0$$

Beispiel. Betrachte $f(x) = e^x$ mit $x_0 = 0$.

$$f(x) = e^x \ \Rightarrow \ f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow \ f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow \ f''(0) = 1$$



Das Taylorpolynom 1. Ordnung ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x$$

Das Taylorpolynom 2. Ordnung ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Wir beobachten, dass $\varphi_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (=Taylorpolynom 2. Ordnung) eine bessere Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ darstellt als das Taylorpolynom 1. Ordnung.

Wir können nun schreiben

$$f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0) \quad \text{bzw.} \quad R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$$

Dabei ist $R_n(x, x_0)$ der "Unterschied" zwischen $f(x)$ und $P_n(x, x_0)$, also der Fehler bei der Approximation von $f(x)$ durch das Taylorpolynom $n-$ter Ordnung.

$R_n(x, x_0)$ wird als **Restglied** ($n-$ter Ordnung) bezeichnet. Es gilt

$$R_n(x_0, x_0) = 0 \ , \ R_n'(x_0, x_0) = 0 \ , \ \ldots \ , \ R_n^{(n)}(x_0, x_0) = 0$$

$$R_n^{(n+1)}(x, x_0) = f^{(n+1)}(x)$$

Durch Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes erhält man folgende Darstellung für das Restglied

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dabei ist c eine Stelle zwischen x_0 und x .

Diese kann auch in der Form

$$c = x_0 + \vartheta \cdot (x - x_0) \ , \ 0 < \vartheta < 1 \quad \text{angegeben werden.}$$

Ist nun $f(x)$ unendlich oft differenzierbar, dann können wir der Funktion $f(x)$ ihre Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt x_0 zuordnen.

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$ (dies ist allerdings nicht immer der Fall!), dann wird $f(x)$ durch ihre Taylorreihe dargestellt, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Allgemein ist zu sagen, dass die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ diese auf einem gewissen Intervall, dem **Konvergenzintervall**, darstellt.

Beispiel. Betrachte $f(x) = e^x$ mit $x_0 = 0$.

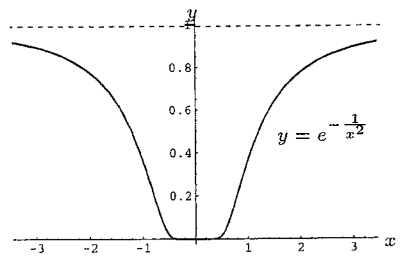
Dann ist $f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = 1$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Damit $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(k+1)!}x^{k+1}$

Weil $\frac{e^{\vartheta x}}{(k+1)!}x^{k+1} \to 0$ (für festes x und $k \to \infty$) , gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(Taylorreihe von } e^x\text{)}$$

Beispiel. Betrachte $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{wenn} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn} \quad x = 0 \end{cases}$



Weil $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, ist die Funktion stetig in $x_0 = 0$.

Des weiteren stellt sich heraus, dass $f^{(k)}(x_0) = 0$ für alle k ist.

Folglich ist die Taylorreihe von $f(x)$ die Nullfunktion. In diesem Fall wird die Funktion also **nicht** durch ihre Taylorreihe dargestellt.

Beispiel. $f(x) = \ln(1+x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$f(x) = \ln(1+x) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2$

$f^{(IV)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \quad \Rightarrow \quad f^{(IV)}(0) = -6$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Folglich gilt

$$\ln(1+x) = 0 + x - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{2}{3!}x^3 - \tfrac{6}{4!}x^4 + \ldots$$

Beispiel. Weil $e^{-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$, erhalten wir

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \ldots) + \tfrac{1}{2}(1 - x + \tfrac{x^2}{2!} - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \ldots) =$$

$$= 1 + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Analog ergibt sich

$$\sinh x = x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \tfrac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Beispiel. $f(x) = \sin x$ mit $x_0 = 0$.

$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -1$

$f^{(IV)}(x) = \sin x = f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(IV)}(0) = 0$

$$f^{(V)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(V)}(0) = 1$$

$$\vdots$$

Daraus ergibt sich das Bildungsgesetz

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad , \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad , \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Folglich ist

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Analog erhalten wir für $f(x) = \cos x$ und $x_0 = 0$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \quad , \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad , \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Folglich ist

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Beispiel. Für die Ermittlung der (komplexen) Reihe zur Funktion $f(x) = e^{ix}$ mit $x_0 = 0$ verwenden wir die Reihe $e^u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ und setzen $u = ix$ ein.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(ix)^n}{n!} =$$

$$= 1 + \tfrac{ix}{1!} + \tfrac{(ix)^2}{2!} + \tfrac{(ix)^3}{3!} + \tfrac{(ix)^4}{4!} + + \tfrac{(ix)^5}{5!} + \tfrac{(ix)^6}{6!} + \tfrac{(ix)^7}{7!} + \ldots$$

Mit $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ etc. folgt nun

$$e^{ix} = (1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \ldots) + i(x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \ldots) =$$

$$= \cos x + i \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Bemerkung. $\cos x$ und $\cosh x$ sind gerade Funktionen und in den zugehörigen Reihen treten nur gerade Potenzen von x auf.

$\sin x$ und $\sinh x$ sind ungerade Funktionen und in den zugehörigen Reihen treten nur ungerade Potenzen von x auf.

Beispiel. (**Binomialreihe**)

Wir betrachten $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $x_0 = 0$.

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ erhalten wir bekanntlich nach dem binomischen Lehrsatz ein Polynom

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} x^k$$

Dabei ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$.

Dies ermöglicht es, den Ausdruck $\binom{\alpha}{k}$ auch für $\alpha \in \mathbb{Q}$ (sogar für $\alpha \in \mathbb{R}$) zu definieren,

$$\tbinom{\alpha}{k} = \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1) = k!\tbinom{\alpha}{k}$$

Mit $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ folgt nun

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{k} x^k \qquad (\text{für } |x| < 1)$$

Rückblick auf Bestimmung von Extrema

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0+\vartheta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2$$

Mit $h = x - x_0$ erhalten wir die Darstellung

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}h + \tfrac{f''(x_0+\vartheta h)}{2!}h^2$$

Ist nun $f'(x_0) = 0$ dann ist $f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f''(x_0+\vartheta h)}{2!} h^2$

- Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist auch $f''(x_0 + \vartheta h) > 0$ für hinreichend kleines h und folglich ist

  $f(x_0 + h) > f(x_0)$ ... lokales Minimum

- Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist auch $f''(x_0 + \vartheta h) < 0$ für hinreichend kleines h und folglich ist

  $f(x_0 + h) < f(x_0)$ ... lokales Maximum

- Ist $f''(x_0) = 0$, dann ist

  $f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'''(x_0+\vartheta h)}{3!} h^3$

Der Faktor h^3 kann nun positiv oder negativ sein. Unter der Annahme, dass $f''' \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 ist, liegt an der Stelle x_0 somit kein Extremum, sondern ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente vor.