

## 2. Übungsblatt – Gruppe A

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ②

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & 5 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$A \cdot x = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 4 \\ 2x - 2y + 4z &= 2 \\ 2x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? ①

$$\begin{aligned} -x & - 5z + 6w = 0 \\ 2x + 5y & + 8w = 0 \\ x + 2y + z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je ②

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 12 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 & 3x_1 + 2x_3 &= 1 \\ & & x_1 - 2x_2 - 2x_4 &= 9 \end{aligned}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

②

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z + w &= 4 \\2x + 2y + z + w &= 3 \\3x + y - z - 2w &= -1\end{aligned}$$

34. Man bestimme alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die das folgende System lösbar ist und gebe in diesem Fall die Lösung an.

②

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= a^2 \\x + y + 3z &= a \\3x + 4y + 7z &= 8\end{aligned}$$

35. Man bestimme die Summe, die Differenz  $A - B$  und das Produkt  $A \cdot B$  der folgenden Matrizen

①

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne

①

$$A - B^T, \quad B^T \cdot B, \quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  und  $B$  jeweils ①, für  $C$  ②

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

je ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

39. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist die Matrix

je ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Matrizen regulär?

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  und  $B$  jeweils (1), für  $C$  (2)

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems

(1)

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die das System

(1)

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 19 \\ 4x - y + 2z &= 4 \\ 2x + 4y - 5z &= a \end{aligned}$$

eine Lösung mit  $x = 3$  besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation  $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$  mit ①

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

**Hinweis:** Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix  $A$  die gemäß der Transformationsformel  $\vec{y} = A\vec{x}$  eine Drehung im  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\varphi = 120^\circ$  beschreibt.  
Welche Abbildung beschreibt die Matrix  $A^2$ , welche die Matrix  $A^{-1}$ ? ①

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix orthogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse ②

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi & -\sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi & \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

**Hinweis:** Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{je } ②$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{je } ③$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix  $T$  so, dass der Ausdruck  $T^t A T$  eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische  $2 \times 2$  Matrix mit den Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und den dazugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  wobei ②

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Übungsblatt – Gruppe B

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & 10 & 5 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 4 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? ①

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je **2**

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 &= 2\end{aligned}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **2**

$$\begin{aligned}x + y + 3z + 2w &= 4 \\ x + 2y + 2z + w &= 3 \\ -2x + 3y + z - w &= -1\end{aligned}$$

34. Gegeben ist das Gleichungssystem **2**

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -2\lambda x_1 + \lambda x_2 + 9x_3 &= 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 1.\end{aligned}$$

- (a) Für welche  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
- (b) Für welche  $\lambda \in \mathbb{R}$  existieren beliebig viele Lösungen?
- (c) Für welche  $\lambda \in \mathbb{R}$  existieren keine Lösungen?
- (d) Man berechne die Lösung für  $\lambda = 1$ .
- (e) Man berechne die Lösung zu b).
- (f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch gedeutet werden?

35. Man bestimme die Summe, die Differenz  $A - B$  und das Produkt  $A \cdot B$  der folgenden Matrizen **1**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne **1**

$$A - B^T, \quad B^T \cdot B, \quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  und  $B$  jeweils **①**, für  $C$  **②**

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je **②**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

39. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist die Matrix je **②**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & 2 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 2 & 2 & a-2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Matrizen regulär? je **②**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  und  $B$  jeweils **①**, für  $C$  **②**



42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems

(1)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die das System

(1)

$$\begin{aligned} 5x - 3y - 2z &= 31 \\ 2x + 6y + 3z &= 4 \\ 4x + 2y - z &= a \end{aligned}$$

eine Lösung mit  $z = -6$  besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation  $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$  mit

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

**Hinweis:** Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix  $A$  die gemäß der Transformationsformel  $\vec{y} = A\vec{x}$  eine Drehung im  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\varphi = -30^\circ$  beschreibt.

Welche Abbildung beschreibt die Matrix  $A^2$ , welche die Matrix  $A^{-1}$ ?

(1)

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix orthogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse

(2)

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

**Hinweis:** Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{je } ②$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{je } ③$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix  $T$  so, dass der Ausdruck  $T^t A T$  eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische  $2 \times 2$  Matrix mit den Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und den dazugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  wobei ②

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Übungsblatt – Gruppe C

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je **①**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je **②**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -5 & 10 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **②**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **②**

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 4 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? **①**

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x - 2y - 3z &= 0 \\ -3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je **②**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 12 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 & 3x_1 + 2x_3 &= 1 \\ & & x_1 - 2x_2 - 2x_4 &= 9 \end{aligned}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

②

$$\begin{array}{rccccrcr} x & + & 3y & - & z & - & 2w & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & w & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 4 \end{array}$$

34. Für welche Werte von  $\alpha$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  ist das Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit

②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \end{pmatrix}$$

lösbar, eindeutig lösbar bzw. nicht lösbar?

35. Man bestimme die Summe, die Differenz  $A - B$  und das Produkt  $A \cdot B$  der folgenden Matrizen

①

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne

①

$$A - B^T, \quad B^T \cdot B, \quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  und  $B$  jeweils ①, für  $C$  ②

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

je ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

39. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist die Matrix

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 3 & 1+a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Matrizen regulär?

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  und  $B$  jeweils (1), für  $C$  (2)

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems

(1)

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die das System

(1)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ ax + 2y - 3z &= -4 \end{aligned}$$

eine Lösung mit  $x = 1$  besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation  $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$  mit ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ?$$

**Hinweis:** Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix  $A$  die gemäß der Transformationsformel  $\vec{y} = A\vec{x}$  eine Drehung im  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\varphi = 45^\circ$  beschreibt.  
Welche Abbildung beschreibt die Matrix  $A^2$ , welche die Matrix  $A^{-1}$ ? ①

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix orthogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse ②

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

**Hinweis:** Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{je } ②$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{je } ③$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix  $T$  so, dass der Ausdruck  $T^t A T$  eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische  $2 \times 2$  Matrix mit den Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und den dazugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  wobei ②

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## 2. Übungsblatt – Gruppe D

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ①

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ②

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & 5 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 6y - 2z &= 8 \\ 2x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? ①

$$\begin{aligned} -2y + z &= 0 \\ x + 3y - z &= 0 \\ 2x + z &= 0 \end{aligned}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je ②

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 & x + y - z + w &= 3 \\ 4x_1 + x_2 &= 7 & 2x - y - z + 2w &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -1 & -3y + z &= -2 \\ & & -3x + 3y + z - 3w &= -5 \end{aligned}$$



33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

②

$$\begin{aligned}x + y + 2z + 2w &= 3 \\2x + y + z + 3w &= 4 \\-x - 2y + 3z + w &= -1\end{aligned}$$

34. Man bestimme alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die das System

②

$$\begin{aligned}x + y - z &= 3 \\x - y + 3z &= 4 \\x + y + (a^2 - 10)z &= a\end{aligned}$$

- (a) keine Lösung,
- (b) eine eindeutig bestimmte Lösung,
- (c) beliebig viele Lösungen besitzt.

35. Man bestimme die Summe, die Differenz  $A - B$  und das Produkt  $A \cdot B$  der folgenden Matrizen

①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne

①

$$A - B^T, \quad B^T \cdot B, \quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Für die Matrix  $C$  und ihre Inverse  $C^{-1}$  gebe man eine geometrische Interpretation der durch sie vermittelten Transformation an. (Hinweis: Man betrachte die Bilder der kanonischen Basisvektoren)

Für  $A$  und  $B$  jeweils ①, für  $C$  ②

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

je ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

39. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist die Matrix

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Matrizen regulär?

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  und  $B$  jeweils (1), für  $C$  (2)

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen

je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems

(1)

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die das System

(1)

$$\begin{aligned} 5x - 3y - 2z &= 31 \\ 2x + 6y + 3z &= 4 \\ 4x + 2y - z &= a \end{aligned}$$

eine Lösung mit  $z = -6$  besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation  $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$  mit

①

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} ?$$

**Hinweis:** Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix  $A$  die gemäß der Transformationsformel  $\vec{y} = A\vec{x}$  eine Drehung im  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\varphi = -90^\circ$  beschreibt.

Welche Abbildung beschreibt die Matrix  $A^2$ , welche die Matrix  $A^{-1}$ ?

①

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix orthogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse

②

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

**Hinweis:** Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{je } ②$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{je } ③$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix  $T$  so, dass der Ausdruck  $T^t A T$  eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische  $2 \times 2$  Matrix mit den Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und den dazugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  wobei ②

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## 2. Übungsblatt – Gruppe GEO

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ②

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 10 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & & = 0 \\ & x_2 + x_3 & = 0 \\ & & x_3 + x_4 = 0 \\ & & & x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 & & & & - x_5 = 0 \end{array}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$\begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & 1 \\ x + 3y - z & = & 4 \\ -4x - 4y - 2z & = & -10 \end{array}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? ①

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ & 2y + 2z & = 0 \\ x + 2y + 3z & = & 0 \end{array}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je **②**

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\2x_2 - 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 8 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **②**

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z + w &= 4 \\2x + 2y + z + w &= 3 \\3x + y - z - 2w &= -1\end{aligned}$$

34. Man bestimme alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die das System **②**

$$\begin{aligned}x + y - z &= 3 \\x - y + 3z &= 4 \\x + y + (a^2 - 10)z &= a\end{aligned}$$

- (a) keine Lösung,
- (b) eine eindeutig bestimmte Lösung,
- (c) beliebig viele Lösungen besitzt.

35. Man bestimme die Summe, die Differenz  $A - B$  und das Produkt  $A \cdot B$  der folgenden Matrizen **①**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne **①**

$$A - B^T, \quad B^T \cdot B, \quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Für die Matrix  $C$  und ihre Inverse  $C^{-1}$  gebe man eine geometrische Interpretation der durch sie vermittelten Transformation an. (Hinweis: Man betrachte die Bilder der kanonischen Basisvektoren)

Für  $A$  und  $B$  jeweils **①**, für  $C$  **②**

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 10 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

39. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist die Matrix je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Matrizen regulär? je (2)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  und  $B$  jeweils (1), für  $C$  (2)

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems (1)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die das System ①

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & y & & & = & a \\ 3x & - & y & - & z & = & -10 \end{array}$$

eine Lösung mit  $y = 1$  besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation  $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$  mit ①

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} ?$$

**Hinweis:** Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix  $A$  die gemäß der Transformationsformel  $\vec{y} = A\vec{x}$  eine Drehung im  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\varphi = 120^\circ$  beschreibt. Welche Abbildung beschreibt die Matrix  $A^2$ , welche die Matrix  $A^{-1}$ ? ①

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix orthogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse ②

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

**Hinweis:** Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Für  $A$  ①, für  $B$  und  $C$  jeweils ②



50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{je } \textcircled{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{je } \textcircled{3}$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix  $T$  so, dass der Ausdruck  $T^t A T$  eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische  $2 \times 2$  Matrix mit den Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und den dazugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  wobei  $\textcircled{2}$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$