

09. Lineare Abbildungen und Koordinatentransformationen

Definition. Seien V und W Vektorräume. Unter einer **linearen Abbildung** versteht man eine Abbildung

$$F : V \rightarrow W \quad , \quad v \mapsto F(v) = w$$

mit folgender Eigenschaft:

$$F(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda F(\vec{v}_1) + \mu F(\vec{v}_2) \quad , \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \quad , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Bemerkung. Dies ist gleichbedeutend damit, dass

$$F(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = F(\vec{v}_1) + F(\vec{v}_2) \quad \text{und} \quad F(\lambda \vec{v}_1) = \lambda F(\vec{v}_1)$$

$$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \quad , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Bemerkung. Die Abbildung $F : V \rightarrow W$ ist genau dann linear, wenn das Bild jeder Linearkombination von Vektoren aus V die entsprechende Linearkombination der Bildvektoren ist, i.e.

$$F(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k) = \lambda_1 F(\vec{v}_1) + \lambda_2 F(\vec{v}_2) + \dots + \lambda_k F(\vec{v}_k)$$

Bemerkung. Die durch eine Matrix $A \in M(m \times n)$ beschriebene Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad , \quad \vec{x} \mapsto \vec{y} = A \cdot \vec{x}$$

ist eine lineare Abbildung.

Umgekehrt kann jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch eine Matrix $A \in M(m \times n)$ in obiger Form beschrieben werden.

Beispiele.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = A \cdot \vec{x} = \vec{x}$... identische Abbildung

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c > 1, \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dehnung in Richtung der x_1 -Achse

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad c > 1, \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$$

Dehnung in Richtung der x_2 -Achse

4. Für $0 < c < 1$ erhält man bei obigen Matrizen jeweils eine Stauchung.

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an Richtung der x_1 -Achse

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an Richtung der x_2 -Achse

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Geraden $x_2 = x_1$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + cx_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Scherung entlang der x_1 -Achse

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + cx_1 \end{pmatrix}$$

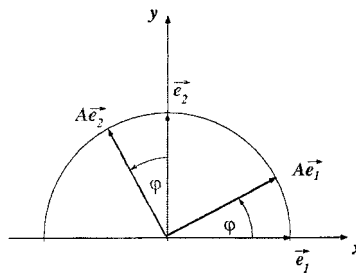
Scherung entlang der x_2 -Achse

Satz. Jede Matrix $A \in M(2 \times 2)$ mit $\det A \neq 0$ kann dargestellt werden als Komposition von Dehnungen, Scherungen und Spiegelungen.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Dann gilt $\det A = 1$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi \\ x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{pmatrix}$$



Dies ist eine **Drehung** um den Winkel φ in positiver Richtung.

Wir kommen nun zum Begriff des **Koordinatensystems**.

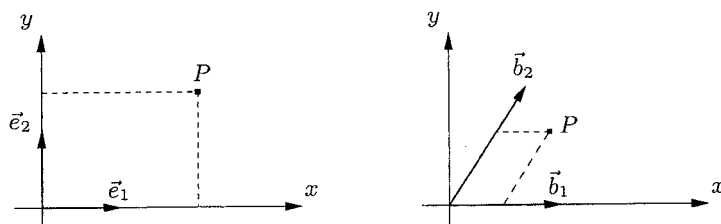
Die grundsätzliche Idee ist dabei, jedem Vektor \vec{v} aus einem Vektorraum V mit $\dim V = n$ in gewisser Weise n Zahlen, also einen Vektor aus \mathbb{R}^n , zuzuordnen, welche dann die **Koordinaten** von \vec{v} sind.

Diese Zuordnung wird ermöglicht, wenn wir in V eine **Basis** wählen.

Insbesondere wird im \mathbb{R}^n ein Koordinatensystem durch Wahl einer Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ angegeben.

Beispiel. Im \mathbb{R}^2 gibt es folglich ein Koordinatensystem, welches durch die kanonische Basis (\vec{e}_1, \vec{e}_2) definiert ist.

Wir können aber auch ein Koordinatensystem betrachten, welches durch die Basis (\vec{b}_1, \vec{b}_2) mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ definiert ist.



Definition. Sei $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ eine Basis des \mathbb{R}^n .

Dann kann jeder Vektor \vec{OP} im \mathbb{R}^n in **eindeutiger** Weise als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden,

$$\vec{OP} = x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + \dots + x_n \vec{b}_n$$

Die Zahlen x_1, \dots, x_n nennt man die **Koordinaten** des Vektors \vec{OP} bezüglich der Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$.

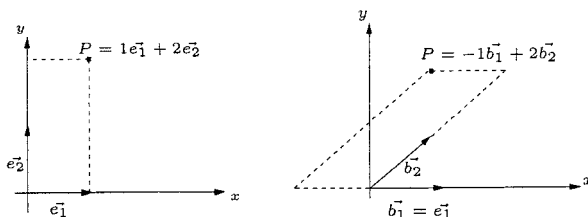
Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ heißt **Koordinatenvektor** von \vec{OP} bezüglich der Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$.

Beispiel. Im \mathbb{R}^2 seien (\vec{e}_1, \vec{e}_2) und (\vec{b}_1, \vec{b}_2) die im vorigen Beispiel angegebenen Basen.

Sei weiters $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{OP} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = (-1) \cdot \vec{b}_1 + 2 \cdot \vec{b}_2 \Rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Definition.

Unter einer **Koordinatentransformation** versteht man den Übergang von einer Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ zu einer anderen Basis $(\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n)$.

Dabei ändern sich natürlich die Koordinaten eines Vektors \vec{OP} (siehe Beispiel vorher).

Sei also $\vec{OP} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor bzgl.

$(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ und $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor bzgl. $(\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n)$.

Da jeder Vektor \vec{b}'_i eine Linearkombination der Vektoren $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ ist, können wir schreiben

$$\vec{b}'_1 = t_{11}\vec{b}_1 + t_{12}\vec{b}_2 + \dots + t_{1n}\vec{b}_n$$

$$\vec{b}'_2 = t_{21}\vec{b}_1 + t_{22}\vec{b}_2 + \dots + t_{2n}\vec{b}_n$$

⋮

$$\vec{b}'_n = t_{n1}\vec{b}_1 + t_{n2}\vec{b}_2 + \dots + t_{nn}\vec{b}_n$$

Stellt man die Koeffizienten t_{ij} in einer Matrix dar, so erhält man die **Transformationsmatrix** $T = (t_{ij})$:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten nun

$$\vec{OP} = x'_1\vec{b}'_1 + x'_2\vec{b}'_2 + \dots + x'_n\vec{b}'_n =$$

$$= x'_1(t_{11}\vec{b}_1 + t_{12}\vec{b}_2 + \dots + t_{1n}\vec{b}_n) + \dots + x'_n(t_{n1}\vec{b}_1 + t_{n2}\vec{b}_2 + \dots + t_{nn}\vec{b}_n) =$$

$$= (t_{11}x'_1 + t_{21}x'_2 + \dots + t_{n1}x'_n)\vec{b}_1 + (t_{12}x'_1 + t_{22}x'_2 + \dots + t_{nn}x'_n)\vec{b}_n$$

Daraus folgt nun, dass $\vec{x} = T^T \cdot \vec{x}'$ bzw. $\vec{x}' = (T^T)^{-1} \cdot \vec{x}$.

Bemerkung. In der Literatur wird oft die Matrix $T^* = (T^T)^{-1}$ als Transformationsmatrix bezeichnet.

Ist \vec{x} der Koordinatenvektor von \overrightarrow{OP} bzgl. der ersten Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ und \vec{x}' der Koordinatenvektor von \overrightarrow{OP} bzgl. der zweiten Basis $(\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n)$, dann gilt

$$\vec{x}' = T^* \cdot \vec{x}.$$

Beispiel. Wir betrachten wieder die Basen (\vec{e}_1, \vec{e}_2) und (\vec{b}_1, \vec{b}_2) von vorher, und $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \quad , \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$$

$$\text{Damit ist } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad T^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (T^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Folglich ist } \vec{x}' = (T^T)^{-1} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die geführte Diskussion kann auch auf geometrische Weise interpretiert werden.

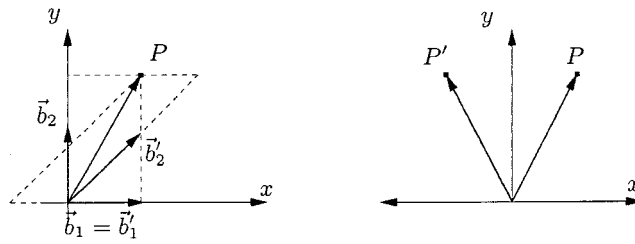
a) Veränderung des Koordinatensystems

Der Punkt P wird festgehalten, man wählt eine neue Basis. Es erfolgt eine Transformation des alten Koordinatenvektors in einen neuen.

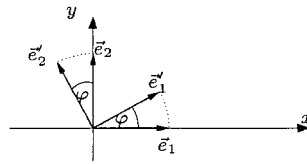
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Veränderung des Punktes

Das Koordinatensystem bleibt fest, der Punkt wird durch eine lineare Abbildung in einen anderen Punkt transformiert.



Beispiel. Betrachten wir nun eine Drehung im \mathbb{R}^2 .



$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = (-\sin \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2$$

Daraus ergibt sich die Transformationsmatrix (Drehmatrix)

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

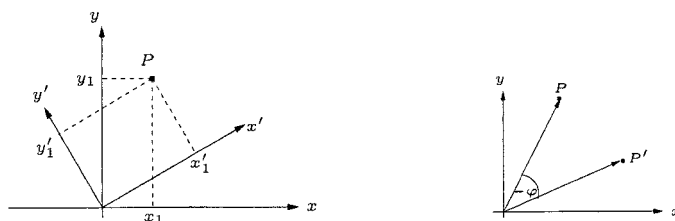
a) Drehung des Koordinatensystems, wobei der Punkt fest bleibt

Siehe vorher: $\vec{x} = T^T \cdot \vec{x}'$ bzw. $\vec{x}' = (T^T)^{-1} \cdot \vec{x}$

b) Veränderung des Punktes

Das Koordinatensystem bleibt fest, der Punkt wird in einen neuen Punkt transformiert. Die Transformationsformel für die Drehung eines Punktes bzw. dessen Ortsvektors, wobei das Koordinatensystem fest bleibt, ist durch

$$\vec{x}' = (T^T) \cdot \vec{x} \text{ gegeben.}$$



Bemerkung. Einer Drehung des Koordinatensystems um den Winkel φ (bei festgehaltenem Punkt P) entspricht eine Drehung des Punktes P (bei festgehaltenem Koordinatensystem) um den Winkel $-\varphi$.

Beispiel. Wir betrachten eine Drehung, wobei das Koordinatensystem fix bleibt.

Gegeben sei der Punkt P mit den Koordinaten $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, der um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gedreht wird.

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Also } T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow T^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = T$$

$$\vec{x}' = (T^T) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.71 \\ 2.12 \end{pmatrix}$$