

3. Übungsblatt – Gruppe A

52. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen: je **①**

$$(a) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} \quad (b) \quad f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6} \quad (c) \quad f(x) = \sqrt{2 - 3x}$$

53. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen: je **①**

$$(a) \quad f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^2} \quad (b) \quad f(x) = e^{3x} + e^{-3x} \quad (c) \quad f(x) = \left(\frac{2}{x} - 2x\right)^2$$

54. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch? je **①**

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{1 - \cos x} \quad (b) \quad f(x) = \sin(1 + x) \quad (c) \quad f(x) = \cos(\pi/4 - x)$$

55. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4} \quad \text{①} \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3} \quad \text{①}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{2x + 12}{|x + 6|} \quad \text{②} \quad d) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{②}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right) \quad \text{②} \quad f) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right) \quad \text{②}$$

56. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte **①**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

(b) Ist $f(x)$ stetig auf \mathbb{R} ?

①

(c) Man skizziere den Graph der Funktion.

①

57. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

②

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \alpha x & \text{für } x < -1 \\ (x - 1)^2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

auf \mathbb{R} stetig ist.

Man skizziere die Funktion.

Man differenziere folgende Funktionen:

je ②

58.

$$f_1(x) = (5x^2 + 7x - 1) \cdot (2x^2 - 3x + 2), \quad f_2(x) = \frac{\sinh x}{x^2 + 1}, \quad f_3(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$$

59.

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{3x - 1}}, \quad f_2(x) = e^{\ln x - 1}, \quad f_3(x) = \frac{x}{\sin(x/2)}$$

60.

$$f_1(x) = \sqrt{1 + (x^2 + 1)^2}, \quad f_2(x) = \sin(e^{2x}) + e^{\sin 2x}$$

61.

$$f_1(x) = \sin(\cos x) - \cos(\sin x), \quad f_2(x) = \operatorname{arccot} \sqrt{x}$$

62.

$$f_1(x) = \ln \frac{2x + 1}{3x - 5}, \quad f_2(x) = e^{\sqrt{x}}$$

63.

$$f_1(x) = (\ln x)^x, \quad f_2(x) = \frac{1}{1 - \cos 3x}$$

64.

$$f_1(x) = \arctan \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{2x}}$$

3. Übungsblatt – Gruppe B

52. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen: je **①**

$$(a) \quad f(x) = \frac{x-1}{4-x^2} \quad (b) \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2+5x+6} \quad (c) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

53. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen: je **①**

$$(a) \quad f(x) = 4x + \frac{1}{x^3} \quad (b) \quad f(x) = e^{x^2+1} \quad (c) \quad f(x) = (1+x^3)^2$$

54. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch? je **①**

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x} \quad (b) \quad f(x) = 2 - \frac{1}{\sin x} \quad (c) \quad f(x) = \cos(2x + \pi/3)$$

55. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad \text{①} \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} \quad \text{①}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|} \quad \text{②} \qquad d) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|x|} \right) \quad \text{②}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4} \quad \text{②} \qquad f) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x}{9x + 4}} \quad \text{②}$$

56. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \\ 3 - x & \text{für } 0 \leq x < 3 \\ (x - 3)^2 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte **①**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

(b) Wo ist die Funktion $f(x)$ unstetig?

①

(c) Man skizziere den Graph der Funktion.

①

57. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

②

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für } x \leq -1 \\ x + \alpha & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

auf \mathbb{R} stetig ist.

Man skizziere die Funktion.

Man differenziere folgende Funktionen:

je ②

58.

$$f_1(x) = \frac{5x^2 + 7x - 1}{2x^2 - 3x + 2}, \quad f_2(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f_3(x) = (x^2 - 1)^5(x^3 + 1)^7$$

59.

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}, \quad f_2(x) = \sqrt{x \ln(x^4)}, \quad f_3(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$

60.

$$f_1(x) = \ln(\sin x) - \frac{1}{2} \sin^2 x, \quad f_2(x) = \sqrt{\ln(x^2)} + \ln \sqrt{x^2 + 2}$$

61.

$$f_1(x) = \arcsin \frac{x}{3}, \quad f_2(x) = \arcsin(\cos x)$$

62.

$$f_1(x) = \ln(\ln x) + \sqrt{\ln x}, \quad f_2(x) = x^{2x+1}$$

63.

$$f_1(x) = \sqrt{\sinh x}, \quad f_2(x) = \operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 + 1}$$

64.

$$f_1(x) = \operatorname{arccot}(x^2), \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

3. Übungsblatt – Gruppe C

52. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen: je **①**

$$(a) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad (b) f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 4} \quad (c) f(x) = \sqrt{3 - 2x}$$

53. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen: je **①**

$$(a) f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^2} \quad (b) f(x) = e^{3x} + e^{-3x} \quad (c) f(x) = \left(\frac{2}{x} - 2x\right)^2$$

54. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch? je **①**

$$(a) f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x} \quad (b) f(x) = 2 - \frac{1}{\sin x} \quad (c) f(x) = \cos(2x + \pi/3)$$

55. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4} \quad \text{①} \qquad b) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^4 + 3x + 6} \quad \text{①}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4} \quad \text{②} \qquad d) \lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{2x + 12}{|x + 6|} \quad \text{②}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad \text{②} \qquad f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}} \quad \text{②}$$

Hinweis zu e): Ersetze x durch $-y$ und führe dann den Grenzübergang $y \rightarrow \infty$ durch.

56. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|+x}{2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte **①**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

(b) Man untersuche, ob die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig ist.

①

(c) Man skizziere den Graph der Funktion.

①

57. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

②

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 3 + \alpha x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf \mathbb{R} stetig ist.

Man skizziere die Funktion.

Man differenziere folgende Funktionen:

je ②

58.

$$f_1(x) = (5x^2 + 7x - 1) \cdot (2x^2 - 3x + 2), \quad f_2(x) = \frac{\sinh x}{x^2 + 1}, \quad f_3(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$$

59.

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}, \quad f_2(x) = \sqrt{x \ln(x^4)}, \quad f_3(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$

60.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin(\cot x)}, \quad f_2(x) = \sin(\ln x) - \frac{1}{2} \cos^2 x$$

61.

$$f_1(x) = \ln \frac{1}{x^2 + 1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\arctan x^2}$$

62.

$$f_1(x) = \ln \frac{2x + 1}{3x - 5}, \quad f_2(x) = e^{\sqrt{x}}$$

63.

$$f_1(x) = \sqrt{\sinh x}, \quad f_2(x) = \operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 + 1}$$

64.

$$f_1(x) = \arcsin \frac{x^2}{3}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{3x - 1}}$$

3. Übungsblatt – Gruppe D

52. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen: je **①**

$$(a) \quad f(x) = \frac{x+1}{3-x^2} \quad (b) \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x-3} \quad (c) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$$

53. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen: je **①**

$$(a) \quad f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^2} \quad (b) \quad f(x) = e^{2x} - e^{-2x} \quad (c) \quad f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

54. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch? je **①**

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{\sin x + \cos x} \quad (b) \quad f(x) = 2 + \frac{2}{\cos x} \quad (c) \quad f(x) = \sin(\pi/6 - x)$$

55. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4} \quad \text{①} \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^4 + 3x + 6} \quad \text{①}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4} \quad \text{②} \qquad d) \quad \lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{2x + 12}{|x + 6|} \quad \text{②}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad \text{②} \qquad f) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}} \quad \text{②}$$

Hinweis zu e): Ersetze x durch $-y$ und führe dann den Grenzübergang $y \rightarrow \infty$ durch.

56. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 & \text{für } x < -1 \\ \sqrt{2+x} & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \frac{\sqrt{2}(x-1)}{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte ①

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x),$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

(b) Wo ist die Funktion $f(x)$ unstetig? ①

(c) Man skizziere den Graph der Funktion. ①

57. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion ②

$$f(x) = \begin{cases} (x + \alpha)^2 & \text{für } x \leq 0 \\ 4 + 3x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

auf \mathbb{R} stetig ist.

Man skizziere die Funktion.

Man differenziere folgende Funktionen: je ②

58.

$$f_1(x) = (2x^2 + 1)(2x^2 + 2)(2x^2 + 3), \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad f_3(x) = x^2 \tan x$$

59.

$$f_1(x) = \frac{1 + x^2}{\cos x}, \quad f_2(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{1 - \cos 3x}$$

60.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin(\cot x)}, \quad f_2(x) = \sin(\ln x) - \frac{1}{2} \cos^2 x$$

61.

$$f_1(x) = \arccos \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \ln(x\sqrt{x^2 + 1})$$

62.

$$f_1(x) = \ln \sqrt{x + 1}, \quad f_2(x) = x^{1/x}$$

63.

$$f_1(x) = e^{\frac{x+1}{x+2}}, \quad f_2(x) = \operatorname{artanh}(e^x)$$

64.

$$f_1(x) = \arccos \frac{x}{5}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{3x - 1}}$$

3. Übungsblatt – Gruppe GEO

52. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen: je **1**

$$(a) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad (b) f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 4} \quad (c) f(x) = \sqrt{3 - 2x}$$

53. Man untersuche, welche Symmetrieeigenschaften die folgenden Funktionen besitzen: je **1**

$$(a) f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2)^3} \quad (b) f(x) = \left(\frac{1}{x} + 4x\right)^2 \quad (c) f(x) = \left(\frac{1}{x} + 4x\right)^3$$

54. Welche der folgenden Funktionen ist periodisch? je **1**

$$(a) f(x) = 2 + \tan x \quad (b) f(x) = \frac{1}{2 - \sin x} \quad (c) f(x) = \sin(2x + \pi/3)$$

55. Man bestimme folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{1} \\ b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2} & \text{1} \\ c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) & \text{2} \\ d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) & \text{2} \\ e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 5}{(x^2 - 2)(2x^2 - 1)} & \text{2} \\ f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 1} & \text{2} \end{array}$$

56. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|+x}{2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(a) Man berechne – falls möglich – die Grenzwerte **1**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

(b) Man untersuche, ob die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig ist.

①

(c) Man skizziere den Graph der Funktion.

①

57. Man untersuche für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

②

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 9 & \text{für } x < 0 \\ (x + \alpha)^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

auf \mathbb{R} stetig ist.

Man skizziere die Funktion.

Man differenziere folgende Funktionen:

je ②

58.

$$f_1(x) = (x^2 - 1)e^{2x}, \quad f_2(x) = x^2\sqrt{2x + 4}, \quad f_3(x) = x^2 \tan \sqrt{x}$$

59.

$$f_1(x) = \frac{x \ln x}{x + 1}, \quad f_2(x) = \ln(e^x - 1), \quad f_3(x) = \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

60.

$$f_1(x) = (1 + \sqrt{x^2 + 1})^2, \quad f_2(x) = \tan^2(\sin x)$$

61.

$$f_1(x) = \ln \frac{1}{x^2 + 1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\arctan x^2}$$

62.

$$f_1(x) = \ln(\sinh x), \quad f_2(x) = \sinh \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$$

63.

$$f_1(x) = e^{\sqrt{3x-2}}, \quad f_2(x) = \frac{x}{(6x + 4)^{2/3}}$$

64.

$$f_1(x) = \arccos \frac{x}{2}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{3x}{x + 1}}$$