Mathematik 1 WS 2018/19

5. Übungsblatt – Gruppe A

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion **2**

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema **1** und der Wendepunkte **1** der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze **1** des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = 64x^2 - 16x$
80. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
81. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{4}(x+40)$
82. $f(x) = |12 + 4x - x^2|$
83. $f(x) = (4x-1)^{1/3}$
84. $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^4}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren): je **2**

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}, \quad \text{b)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{3x^2-x+2}, \quad \text{c)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x+4}}{\sin 2x},$$

$$\text{d)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}, \quad \text{e)}\quad \lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}, \quad \text{f)}\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen **2**

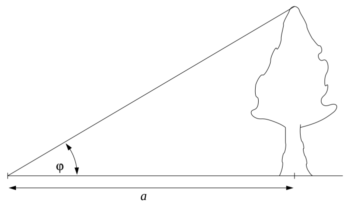
$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = \sqrt{2x+1}, \quad f_3(x) = \tan x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von **2**

$$f(x) = x^{3/4}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 16$, um den Wert von $f(15.96)$ zu approximieren.

88. Die Höhe eines Baumes wird dadurch bestimmt, dass man den Höhenwinkel φ zur Spitze des Baumes von einem Punkt, der $a = 22$m vom Baum entfernt ist, misst.



Man berechne die Höhe des Baumes und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes, wenn der Winkel φ mit 30° und einem möglichen Fehler von 1° gemessen wird.
Hinweis: Man verwende für die Angabe der Winkel das Bogenmaß! (Weshalb?) **2**

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen: je **2**

$$f(x) = x^4 + 3x - 1\,, n = 4, x_0 = 1, \quad g(x) = a^x, a > 0\,, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für **2**

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}\,, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion $\cos x$, bilde den Ausdruck $1 - \cos x$ und dividiere diesen dann durch x^2.

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von **2**

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(0.99)$ und $P_n(0.99)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen **2**

$$\int_0^{0.5} \sin^2 x\, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.0396323$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei **2**

x	-2	0	3
y	15	2	-3

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 1$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$ mit der Funktion **2**

$$f(x) = \sqrt{x}$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(2)$ und $P_2(2)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je **2**

$$\text{(a)}\quad y = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\,, \quad 0 \le x \le 3$$

$$\text{(b)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4t \\ 3-3t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\text{(c)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2$$

$$\text{(d)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2\ln t \\ t+1/t \end{pmatrix}, \quad 1 \le t \le 4$$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve **2**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4+\cos t \\ 2+\sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$ je **2**

$$\text{(a)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$$

$$\text{(b)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve **2**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\cos(t/3) + \cos(\frac{2}{3}t) \\ 2\sin(t/3) - \sin(\frac{2}{3}t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 6\pi \qquad \text{(Hypozykloide)}$$

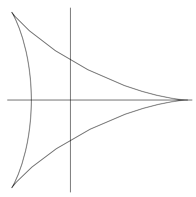


Abbildung 1: Hypozykloide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen je (1)

$a)\quad f(x,y)=\sqrt{y-x}\qquad b)\quad f(x,y)=\ln(9-x^2-9y^2)\qquad c)\quad f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen je (1)

$a)\quad f(x,y)=4x^3-2x^2y+xy^2\qquad b)\quad f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\qquad c)\quad f(x,y)=\arctan(x\sqrt{y})$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von (1)

$$f(x,y)=\frac{x}{x+y}$$

102. $\alpha)$ Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q. (2)

$\beta)$ In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? (1)

$a)\quad f(x,y)=1+2x\sqrt{y}\,,\ P_0(3,4),\ Q(7,1)\,,\qquad b)\quad f(x,y)=\sin(xy)\,,\ P_0(1,0),\ Q(2,1)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z=f(x,y)$ im Punkt P_0 für (2)

$$f(x,y)=\sqrt{x+e^{4y}}\,,\quad P_0(3,0)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man div$\vec{v}$, rot$\vec{v}$ und div(rot$\vec{v}$) (2)

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-y^3\\ x^3\\ z^3\end{pmatrix}$$

Mathematik 1 **WS 2018/19**

5. Übungsblatt – Gruppe B

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion **2**

$$f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema **1** und der Wendepunkte **1** der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze **1** des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
80. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
81. $f(x) = \dfrac{x}{4}(x-40)^{2/3}$
82. $f(x) = |-3 + 4x - x^2|$
83. $f(x) = (x-3)^{1/3}$
84. $f(x) = \dfrac{10(x^2-1)}{x^5}$
85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren): je **2**

$$\text{a)} \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, \quad \text{b)} \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 9}{2x^2 + 3x + 1}, \quad \text{c)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\sqrt{1 - \sin x}}{x}$$

$$\text{d)} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x - 2}, \quad \text{e)} \lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x^2}, \quad \text{f)} \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen **2**

$$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 2\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,, \quad f_3(x) = \cos 3x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von **2**

$$f(x) = x^{2/3}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 8$, um den Wert von $f(7.97)$ zu approximieren.

88. Die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks wird mit dem Wert $s = 6$m gemessen, wobei der Messfehler maximal 1cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Flächeninhalts dieses Dreiecks auf Grund des Messfehlers auftreten kann. **2**

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen: je **2**

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1\,, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}\,, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für **(2)**

$$f(x) = \cos\frac{x}{2}\,, n = 8, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion $\cos x$ und ersetze dann x durch $x/2$.

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von **(2)**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(1.01)$ und $P_n(1.01)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen **(2)**

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x}\, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.601044$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem Lagrange'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei **(2)**

x	-1	1	3
y	2	-1	4

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 2$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das Lagrange'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = \pi/6, x_3 = \pi/4$ mit der Funktion **(2)**

$$f(x) = \sin x$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(1)$ und $P_2(1)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je **(2)**

$$\text{(a)} \quad y = \frac{4}{3}x^{3/2} + 1\,, \quad 0 \le x \le 2$$

$$\text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 12t \\ 5t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\text{(c)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^3/3 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\text{(d)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve **2**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + \sin t \\ t \\ 2 - \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$ je **2**

$$\text{(a)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$$

$$\text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve **2**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \tan t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \pi/2 \le t \le 3\pi/2 \qquad \text{(Konchoide, linker Ast)}$$

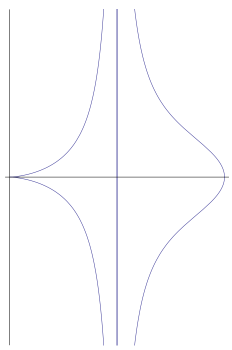


Abbildung 2: Konchoide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen je **1**

$a)$ $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ $\qquad$ $b)$ $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ $\qquad$ $c)$ $f(x,y) = \dfrac{x - 3y}{x + 3y}$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen je 1

$$a)\quad f(x,y) = 6x^2 + 4xy^2 - y^3 \qquad b)\quad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad c)\quad f(x,y) = x\, e^{y/x}$$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von 1

$$f(x,y) = \ln(3x + 5y)$$

102. α) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q. 2

β) In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? 1

$$a)\quad f(x,y) = x\, e^y\,,\ P_0(2,0),\ Q(\frac{1}{2},2)\,, \qquad b)\quad f(x,y) = \ln(2x{+}3y)\,,\ P_0(-1,1),\ Q(2,3)$$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt P_0 für 2

$$f(x,y) = x\sqrt{y}\,, \quad P_0(1,4)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man div$\vec{v}$, rot$\vec{v}$ und div(rot$\vec{v}$) 2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ x + yz \\ xy - \sqrt{z} \end{pmatrix}$$

Mathematik 1 WS 2018/19

5. Übungsblatt – Gruppe C

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion (2)

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema (1) und der Wendepunkte (1) der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze (1) des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = x^3 + x$
80. $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+4}$
81. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{16}(x^2 - 16)$
82. $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$
83. $f(x) = (1-3x)^{2/3}$
84. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren): je (2)

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\pi/6} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \pi/6}\,,\quad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{3x^2-x+2}\,,\quad \text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\ \sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x\ \sin x}{x}\,,\quad \text{e)}\ \lim_{x\to 0} x\ \cot 2x\,,\quad \text{f)}\ \lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x$$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen (2)

$$f_1(x) = x^3 - x\,,\quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,,\quad f_3(x) = \sin 2x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von (2)

$$f(x) = x^{13}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 1$, um den Wert von $f(1.02)$ zu approximieren.

88. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert $r = 21$cm gemessen, wobei der Messfehler maximal 0.05cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann. (2)

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen: je (2)

$$f(x) = x^4 + 4x^2 - x\,, n = 4, x_0 = 2,\quad g(x) = \sqrt{1+x}\,, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für **2**

$$f(x) = e^{x^2}\,, n = 10, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion e^x und ersetze dann x durch x^2.

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von **2**

$$f(x) = \sqrt{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(0.98)$ und $P_n(0.98)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen **2**

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.493107$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei **2**

x	1	3	5
y	-2	-1	1

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 0$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$ mit der Funktion **2**

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(2.3)$ und $P_2(2.3)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je **2**

$$\text{(a)}\quad y = 2x^{2/3}\,, \quad 1 \le x \le 8$$

$$\text{(b)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4+3t \\ 2-4t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2$$

$$\text{(c)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1+\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\text{(d)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve **2**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 0 \\ t^3/3 \end{pmatrix}$$

von $P(0,0,0)$ nach $Q(18,0,9)$.

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$ je **2**

$$\text{(a)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$$

$$\text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/2$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve **2**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos^3(t/4) \\ \sin^3(t/4) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 8\pi \qquad \text{(Asteroide)}$$

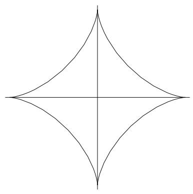


Abbildung 3: Asteroide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen je **1**

$a)$ $f(x,y) = \sqrt{2x+y}$ $\quad b)$ $f(x,y) = \ln(4 - 4x^2 - y^2)$ $\quad c)$ $f(x,y) = \dfrac{x-4y}{x+4y}$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen je **1**

$a)$ $f(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 + xy^4$ $\quad b)$ $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2-y^2}$ $\quad c)$ $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von (1)

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

102. α) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q. (2)

β) In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? (1)

$a)$ $f(x, y) = x\,y^2\,,\quad P_0(3, 2),\ Q(-1, -1)\,,$ $\qquad$ $b)$ $f(x, y) = y \ln x\,,\quad P_0(1, -3),\ Q(5, 0)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P_0 für (2)

$$f(x, y) = \frac{x}{y}\,,\quad P_0(6, 3)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man div$\vec{v}$, rot$\vec{v}$ und div(rot$\vec{v}$) (2)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} xyz \\ 0 \\ -x^2 y \end{pmatrix}$$

Mathematik 1 WS 2018/19

5. Übungsblatt – Gruppe D

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion **2**

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema **1** und der Wendepunkte **1** der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze **1** des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = 2 - x - x^3$
80. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
81. $f(x) = x^{1/3}(x^2 - 7)$
82. $f(x) = |x^2 + 4x - 12|$
83. $f(x) = (2x-1)^{2/3}$
84. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren): je **2**

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to\pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}\,, \quad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x}{3x-5}\,, \quad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x \ \sin x}{x}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x + 3}\,, \quad \text{e)} \quad \lim_{x\to 0} \sin 2x \ \cot 3x\,, \quad \text{f)} \quad \lim_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x}$$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen **2**

$$f_1(x) = 1 - x^2\,, \quad f_2(x) = \sqrt{1-2x}\,, \quad f_3(x) = \cot x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von **2**

$$f(x) = x^{17}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 1$, um den Wert von $f(1.03)$ zu approximieren.

88. Man berechne den maximalen relativen Fehler bei der Bestimmung des Volumens eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 1$m, wenn die Länge der Kante auf 3% genau gemessen wurde. **2**

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen: je **2**

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 2x\,, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \tan x\,, n = 5, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für **2**

$$f(x) = x\,e^{-x}\,, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Zunächst verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion e^x und ersetze dann x durch $-x$. Danach multipliziere man das Ergebnis mit x.

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von **2**

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(1.02)$ und $P_n(1.02)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen **2**

$$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.197365$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei **2**

x	2	4	6
y	-12	-8	-9

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 3$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/3, x_3 = \pi/2$ mit der Funktion **2**

$$f(x) = \cos x$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(1.8)$ und $P_2(1.8)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je **2**

(a) $y = [4 - (x-8)^{2/3}]^{3/2}\,, \quad 0 \le x \le 7$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12(1-t) \\ 5(t+2) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3$

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi$

(d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve **(2)**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

von $P(1,0,0)$ nach $Q(2,1,1)$.

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$ je **(2)**

$$\text{(a)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$$

$$\text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve **(2)**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\cos(t/3) + \cos(\frac{2}{3}t) \\ 2\sin(t/3) - \sin(\frac{2}{3}t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 6\pi \qquad \text{(Hypozykloide)}$$

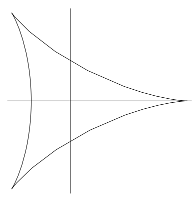


Abbildung 4: Hypozykloide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen je **(1)**

$$a) \quad f(x,y) = \sqrt{x+y} \qquad b) \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2-4) \qquad c) \quad f(x,y) = \frac{x-3y}{x+3y}$$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen je **(1)**

$$a) \quad f(x,y) = 2x^4 - x^2y^2 + y^4 \qquad b) \quad f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2-y^2} \qquad c) \quad f(x,y) = y^2\, e^{xy}$$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von (1)

$$f(x,y) = x^4 - 3x^2y^3$$

102. α) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q. (2)

β) In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? (1)

$a)\quad f(x,y) = x\,e^y\,,\ P_0(2,0),\ Q(\frac{1}{2},2)\,,\qquad b)\quad f(x,y) = \ln(2x+3y)\,,\ P_0(-1,1),\ Q(2,3)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt P_0 für (2)

$$f(x,y) = x\sqrt{y}\,,\quad P_0(1,4)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man div$\vec{v}$, rot$\vec{v}$ und div(rot$\vec{v}$) (2)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ -xy \end{pmatrix}$$

Mathematik 1 WS 2018/19

5. Übungsblatt – Gruppe GEO

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion (2)

$$f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema (1) und der Wendepunkte (1) der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze (1) des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = x^3 + x$

80. $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+4}$

81. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{16}(x^2 - 16)$

82. $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

83. $f(x) = (1 - 3x)^{2/3}$

84. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren): je (2)

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}\,, \quad \text{b)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x}{3x - 5}\,, \quad \text{c)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x \ \sin x}{x}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x + 3}\,, \quad \text{e)} \quad \lim_{x \to 0} \sin 2x \ \cot 3x\,, \quad \text{f)} \quad \lim_{x \to 0} (\cot x)^{\sin x}$$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen (2)

$$f_1(x) = x^2 + 1\,, \quad f_2(x) = \sqrt{2x+1}\,, \quad f_3(x) = \tan x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von (2)

$$f(x) = x^{2/3}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 8$, um den Wert von $f(7.97)$ zu approximieren.

88. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert $r = 21$cm gemessen, wobei der Messfehler maximal 0.05cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann. (2)

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen: je (2)

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 2x\,, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \tan x\,, n = 5, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für **(2)**

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}\,, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion $\cos x$, bilde den Ausdruck $1 - \cos x$ und dividiere diesen dann durch x^2.

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von **(2)**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(1.01)$ und $P_n(1.01)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen **(2)**

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.493107$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei **(2)**

x	2	4	6
y	-12	-8	-9

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 3$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$ mit der Funktion **(2)**

$$f(x) = \sqrt{x}$$

übereinstimmt.
Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(2)$ und $P_2(2)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je **(2)**

$$\text{(a)} \quad y = [4 - (x-8)^{2/3}]^{3/2}\,, \quad 0 \le x \le 7$$

$$\text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 12(1-t) \\ 5(t+2) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3$$

$$\text{(c)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi$$

$$\text{(d)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve **2**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + \sin t \\ t \\ 2 - \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$ je **2**

$$\text{(a)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$$

$$\text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve **2**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\cos t - \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad \text{(Kardioide)}$$

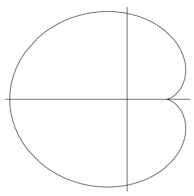


Abbildung 5: Kardioide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen je **1**

$a)\quad f(x,y) = \sqrt{x-y} \qquad b)\quad f(x,y) = \ln(2 - x^2 - y^2) \qquad c)\quad f(x,y) = \dfrac{x-2y}{x+2y}$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen je **1**

$a)\quad f(x,y) = 6x^2 + 4xy^2 - y^3 \qquad b)\quad f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad c)\quad f(x,y) = x\, e^{y/x}$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von (1)

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

102. α) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q. (2)

β) In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? (1)

a) $f(x,y) = \sqrt{5x - 4y}\,,\ P_0(4,1),\ Q(3,2)\,,\quad$ *b*) $f(x,y) = \ln(x^2{+}y^2)\,,\ P_0(1,-1),\ Q(2,-2)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt P_0 für (2)

$$f(x,y) = e^x \cos(xy)\,, \quad P_0(0,0)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man div$\vec{v}$, rot$\vec{v}$ und div(rot$\vec{v}$) (2)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ -xy \end{pmatrix}$$