Bemerkung 66. Wenn ein symmetrisches Integrationsintervall $[-a, a]$ vorliegt, lässt sich die Bestimmung des Flächeninhaltes wesentlich vereinfachen.

(a) Die Funktion f ist symmetrisch, d.h $f(-x) = f(x)$ (siehe Abb. 7.17, links)

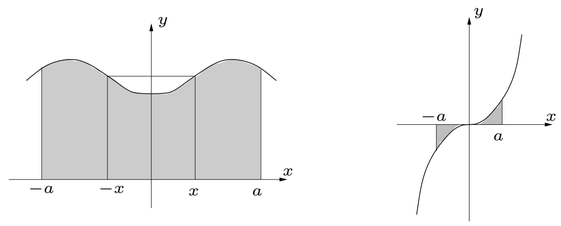

Abbildung 7.17:

$$A = \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

(b) Die Funktion f ist schiefsymmetrisch, d.h $f(-x) = -f(x)$ (siehe Abb. 7.17, rechts)

$$A = \int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$$

2) Die Berechnung der Fläche zwischen zwei Kurven

Definition 70. Ein Bereich $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b \quad \wedge \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}$ heißt **Normalbereich bezüglich der y-Richtung** (s. Abb. 7.18).

Definition 71. Ein Bereich $\{(x, y) \mid c \leq y \leq d \quad \wedge \quad f(y) \leq x \leq g(y)\}$ heißt **Normalbereich bezüglich der x-Richtung** (s. Abb. 7.18).

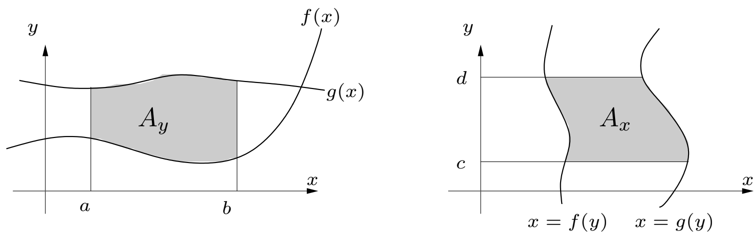

Abbildung 7.18: Normalbereiche

Es gilt:

$$A_y = \int_{a}^{b} \big(g(x) - f(x)\big)\ dx \qquad , \qquad A_x = \int_{c}^{d} \big(g(y) - f(y)\big)\ dy$$

Beispiel 139. Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen der Geraden $y = x$ und der Parabel $y = x^2$ im Intervall $[0, 1]$ (siehe Abb. 7.19).
Schnittpunkt der beiden Funktionen:

$$y = x \quad \cap \quad y = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x(x-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$A_y = \int_{0}^{1} \left(x - x^2\right)\ dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$A_x = \int_{0}^{1} \left(\sqrt{y} - y\right)\ dy = \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$