Bemerkung 88. Da die Funktion $\sin\frac{t}{2}$ im Intervall $[0, 2\pi]$ nur positiv ist, können die Betragsstriche weggelasen werden werden (siehe Abbildung: (10.10))!

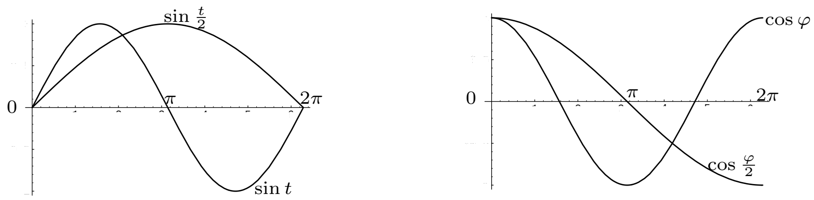

Abbildung 10.10:

Beispiel 192. Gesucht ist die Bogenlänge einer Kardioide (Herzkurve) (s. Abb. 10.11) mit der Polardarstellung $r = a(1 + \cos\varphi) \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
Für die Ableitung $\dot{r}$ ergibt sich: $\dot{r} = -a\sin\varphi$. Die Berechnung erfolgt nach Formel (10.5):

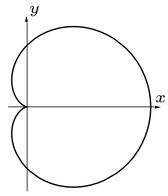

Abbildung 10.11:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$
$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = a\cdot\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\, d\varphi$$

Durch analoge Überlegungen wie in Beispiel (191), bezüglich der Additionstheoreme gilt:

$$s = 2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 2a\left[\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\, d\varphi\right]$$

Beachtet man die Symmetrieeigenschaften der Kurve (siehe Abb. 10.11), so lässt sich schreiben:

$$s = 2\cdot 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi} = 8a$$

c) Die Krümmung

Definition 86. Sei $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve mit der Parmeterdarstellung

$$\vec{x} = \vec{x}(s)\,, \quad s \ldots \text{Bogenlänge}$$

Die **Krümmung** $\varkappa$ von $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$\varkappa(s) := \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \left|\vec{t}\,'(s)\right|$$

wobei

$$\vec{t} = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|}\dot{\vec{x}}(t)$$