Somit ergibt sich für die Richtungsableitung eine vereinfachte Schreibweise:

$$D_{\vec{r}_0} f(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f\big|_{P_0} \cdot \vec{r}_0 \tag{11.7}$$

Analog ist der **Gradient** für Funktionen in drei Variablen definiert:

$$\operatorname{grad} f := \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{r}_0$ im Punkt $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ durch:

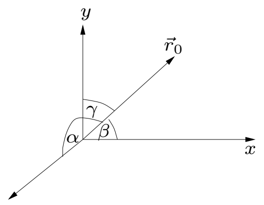

Abbildung 11.13:

$$D_{\vec{r}_0} f\,(x_0, y_0, z_0) := \operatorname{grad} f\big|_{P_0} \cdot \vec{r}_0 \quad \text{mit} \quad P_0\,(x_0, y_0, z_0)\ , \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}\ , \quad |\vec{r}_0| = 1$$

Dabei bezeichnen α, β und γ die Winkel, die der Vektor $\vec{r}_0$ mit den Koordinatenachsen einschließt (siehe Abb. 11.13).

Bemerkung 91. Der Gradient von f weist immer in Richtung des stärksten Anstiegs des Funktionswertes.

Beweis: Für die Richtungsableitung gilt (es handelt sich formal um ein Skalarprodukt):

$$D_{\vec{r}_0} f = \operatorname{grad} f\big|_{P_0} \cdot \vec{r}_0 = |\operatorname{grad} f|\big|_{P_0} \cdot |\vec{r}_0| \cdot \cos\psi$$

ψ entspricht dem Winkel zwischen $\operatorname{grad} f\big|_{P_0}$ und $\vec{r}_0$.
$D_{\vec{r}_0} f$ wird maximal $\iff \cos\psi = 1 \iff \psi = 0$
$|\vec{r}_0|$ nimmt auf $D_{\vec{r}_0}$ keinen Einfluss, da stets gilt: $|\vec{r}_0| = 1$.
Die Richtung von $\operatorname{grad} f$ im Punkt P ist also die Richtung des **maximalen** Anstiegs von f, d.h. die Richtung des größten Zuwachses des Wertes von f in P.

Beispiel 214. Gesucht ist der Gradient der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ im Punkt $P(0, 1, -1)$. Der Grundriss des Punktes P ist: $P_0(0, 1)$

$$\operatorname{grad} f|_{P_0} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}\Bigg|_{P_0} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}\Bigg|_{P_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 92. Der negative Gradient , $-\operatorname{grad} f|_{P_0}$, gibt die Richtung des stärksten Abfalls (der stärksten Abnahme) des Funktionswertes an.

b) Die Divergenz

Definition 95. Ein **Vektorfeld** $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$ bzw. $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ ist eine Vektorfunktion, die jedem Punkt $P(x, y) \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $P(x, y, z) \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ in eindeutiger Weise einen Vektor zuordnet.