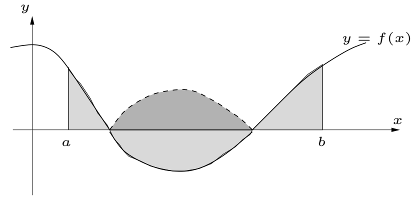

Abbildung 7.5:

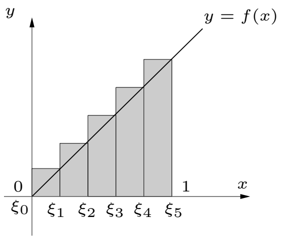

Abbildung 7.6: Obersummen

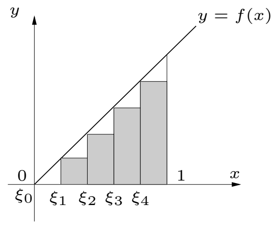

Abbildung 7.7: Untersummen

Beispiel 125. Vorgelegt sei das Integral $\int_0^1 x\ dx$:

1) Approximation durch die Obersumme R^+ (s. Abb. 7.6)

Durch Zerlegung in äquidistante Teilintervalle ergibt sich eine Intervalllänge von $\Delta x_k = \frac{1}{k}$. Für die Funktionwerte erhält man $f(\xi_k) = \xi_k = \frac{n}{k}$.
Durch Anwendung von Formel (7.1) ergibt sich für den Flächeninhalt:

$$R^+\left(f; Z^{(k)}; \xi_1, \dots, \xi_k\right) = \sum_{n=1}^{k} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k} n = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2k}$$

2) Approximation durch die Untersumme R^- (s. Abb. 7.7)

$$\begin{aligned} R^-\left(f; Z^{(k)}; \xi_1, \dots, \xi_k\right) &= \sum_{n=1}^{k} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{n-1}{k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k}(n-1) = \\ &= \frac{1}{k^2}\cdot(0+1+2+\dots+(k-1)) = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{(k-1)k}{2} = \frac{k-1}{2k} \end{aligned}$$

Für die jeweiligen Grenzwerte ergibt sich:

$$\lim_{k\to\infty} R^+(f;\dots) = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} \qquad , \qquad \lim_{k\to\infty} R^-(f;\dots) = \lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2}$$

7.1.3 Eigenschaften von bestimmten Integralen

1. $\int\limits_a^b c\cdot dx = (b-a)\cdot c \qquad\qquad c\in\mathbb{R}$

2. $\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\ dx = \int\limits_a^b f(x)\ dx + \int\limits_a^b g(x)\ dx$

3. $\int\limits_a^b c\cdot f(x)\ dx = c\int\limits_a^b f(x)\ dx$