

$$4. \int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)) \, dx = c_1 \int_a^b f(x) \, dx + c_2 \int_a^b g(x) \, dx$$

(Linearität des bestimmten Integrals)

$$5. \text{ Gilt auf einem Intervall } [a, b] : f(x) \leq g(x) \text{ so folgt: } \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

$$6. \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

$$7. \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad c \in [a, b] \quad \text{siehe Abb. 7.8}$$

$$8. \int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{für } a \leq b$$

$$\text{Für } a = b \text{ folgt } \int_a^a f(x) \, dx = - \int_a^a f(x) \, dx \implies \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$$9. \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

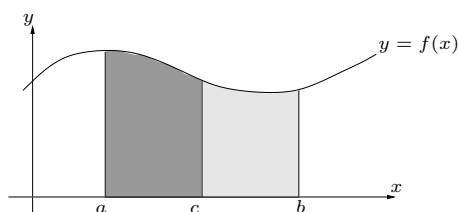


Abbildung 7.8:

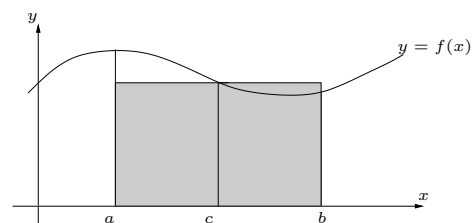


Abbildung 7.9:

$$10. \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x), a \in \mathbb{R}$$

7.1.4 Sätze der Integralrechnung

Satz 35. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, dann existiert ein c in $[a, b]$ mit der Eigenschaft:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

bzw.

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Dabei heißt $f(c)$ der **Mittelwert** der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$ (vgl. Abb. 7.9).

Satz 36. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei die Funktion f stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und sei F die Stammfunktion von f , so gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b$$

Bemerkung 62. Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion.