Unter Anwendung des Mittelwertsatzes entspricht der Differenzenquotient $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ genau der Ableitung $y'(\xi_n)$ der Funktion f an einer Zwischenstelle ξ_n, wobei für ξ gilt: $\xi \in [x_{n-1}, x_n]$.

$$s \approx \sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + \left(y'(\xi_n)\right)^2} \cdot \Delta x_n$$

Dies stellt eine RIEMANN'sche Summe dar, deren Grenzwert für eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge folgendes Integral liefert:

$$s = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + \left(y'(\xi_n)\right)^2} \cdot \Delta x_n = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx$$

Für die Bogenlänge der Kurve $y = f(x)$ von $A\big(a, y(a)\big)$ nach $B\big(b, y(b)\big)$ in expliziter Darstellung ergibt sich somit:

$$s = s(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{10.2}$$

Beispiel 189. Gesucht ist die Bogenlänge der Kettenlinie im Intervall $[0, b]$, die durch die Funktion $y = \cosh x$ definiert ist. Nach der Formel (10.2) ergibt sich für die Bogenlänge:

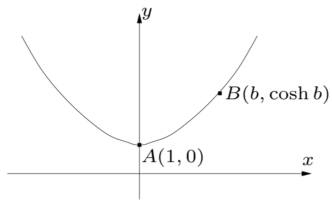

Abbildung 10.9:

$$s(a,b) = \int_0^b \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_0^b \cosh x\, dx = \sinh x\Big|_0^b = \sinh b$$

2) Für die Parameterdarstellung $x = x(t)$ **und** $y = y(t)$

Die Bogenlänge in Parameterdarstellung kann ausgehend von der kartesischen Darstellung durch Substitution einfach ermittelt werden:
Substitution: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ und $dx = \dot{x}\; dt$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \cdot \dot{x}\; dt$$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_\alpha^\beta |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt \tag{10.3}$$

Die Grenzen α, β ergeben sich durch die Beziehung $a = x(\alpha)$ und $b = x(\beta)$.

Definition 85. Eine Kurve $\mathcal{C}$ in der Parameterdarstellung

$$\mathcal{C}: \; \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad a \le t \le b \tag{10.4}$$

heißt **glatte Kurve**, wenn die Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ stetige Funktionen sind.

Sei $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve mit der Parameterdarstellung (10.4). Dann kann man die Bogenlänge s als Funktion des Parameters t (= Länge der Kurve vom Kurvenpunkt $\vec{x}(a)$ bis zu einem beliebigen Punkt $\vec{x}(t) \in \mathcal{C}$) angeben als

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{x}}(u)|\, du$$