Stellt man die Koeffizienten t_{ij} in einer Matrix dar, so erhält man die **Transformationsmatrix** $T = (t_{ij})$:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Diese Matrix beschreibt den Übergang von der alten zur neuen Basis. Damit erhält man die **Transformationsformel für Koordinaten** im $\mathbb{R}^n$ analog wie im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{x}\,' = \left(T^T\right)^{-1} \cdot \vec{x} \tag{3.16}$$

Bemerkung 32. Jede Koordinatentransformation ist eine lineare Abbildung.

Geometrische Interpretation der Koordinatentransformation:

a) Veränderung des Koordinatensystems

Der Punkt P wird festgehalten, man wählt eine neue Basis. Es erfolgt eine Transformation des Koordinatenvektors, aus dem alten Koordinatenvektor entsteht ein neuer (siehe Abb. 3.9):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Veränderung des Punktes

Das Koordinatensystem bleibt fest, der Punkt wird transformiert (siehe Abb. 3.9).

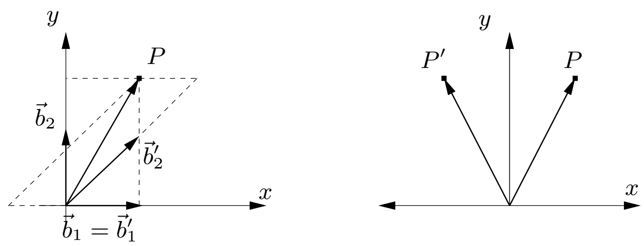

Abbildung 3.9: zu Punkt a) zu Punkt b)

Beispiel 49. Drehung in $\mathbb{R}^2$, siehe Abb. 3.10:

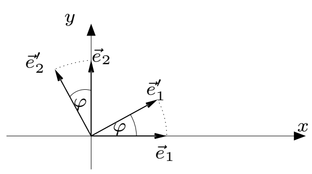

Abbildung 3.10:

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin\varphi \cdot \vec{e}_2 \qquad , \qquad \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = (-\sin\varphi) \cdot \vec{e}_1 + \cos\varphi \cdot \vec{e}_2$$

Damit lässt sich die Transformationsmatrix T anschreiben:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3.17}$$