Dabei bedeutet $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$, dass für eine beliebige Folge $\{(x_n, y_n)\}$, $x_n \neq x_0$, $y_n \neq y_0$, mit der Eigenschaft: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ die Folge der Funktionswerte $f(x_n, y_n)$ gegen A konvergiert (s. Abb. 11.6).
Das heißt, dass bei beliebiger Annäherung an den Punkt (x_0, y_0) stets der selbe Grenzwert auftreten muss.

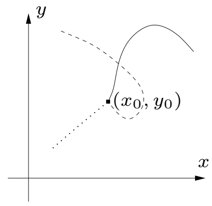

Abbildung 11.6:

Satz 44. *Die Summe, die Differenz und das Produkt von stetigen Funktionen sind wieder stetig. Der Quotient stetiger Funktionen ist überall dort stetig, wo die Nennerfunktion ungleich Null ist.*

Beispiel 204. Gegeben sei die Funktion $z = \sqrt{xy}$ (s. Abb. 11.7).
Für den Definitionsbereich gilt: $xy \geq 0 \iff (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)$

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$$

Beispiel 205. Gegeben sei die Funktion $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (s. Abb. 11.7).
Ihr Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0, 0)\}$.
Für die Untersuchung der Stetigkeit im Punkt $(0, 0)$ wird die Polardarstellung $\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}$ herangezogen:

$$z = \frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \frac{r^2 \overbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}^{=\cos 2\varphi}}{r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}} = \cos 2\varphi$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \cos 2\varphi = \cos 2\varphi$$

Da für verschiedene Winkel verschiedene Grenzwerte existieren, ist diese Funktion im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig.

Beispiel 206. Gegeben sei die Funktion $z = \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$ (s. Abb. 11.7).
$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0, 0)\}$.
Für die Untersuchung der Stetigkeit im Punkt $(0, 0)$ wird die Funktion wiederum in die Polardarstellung $\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}$ übergeführt:

$$z = \frac{(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)^2}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \frac{r^4 \overbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2}^{=\cos^2 2\varphi}}{r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}} = r^2\cos^2 2\varphi$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2 2\varphi = 0$$

Da für verschiedene Winkel nur ein Grenzwert existiert, ist diese Funktion im Punkt $(0, 0)$ stetig.