Interpretationsmöglichkeiten

a) Drehung des Koordinatensystem, wobei der Punkt fest bleibt

Es erfolgt eine Transformation des Koordinatenvektors, wobei der Punkt P festgehalten wird. Die Drehrichtung ist im Gegenuhrzeigersinn als mathematisch positiv definiert (siehe Abb. 3.11). Die Transformationsformel für Koordinaten bei der Drehung des Koordinatensystems sei wie folgt definiert.

$$\vec{x} = T^T \cdot \vec{x}\,' \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x}\,' = \left(T^T\right)^{-1} \cdot \vec{x}$$

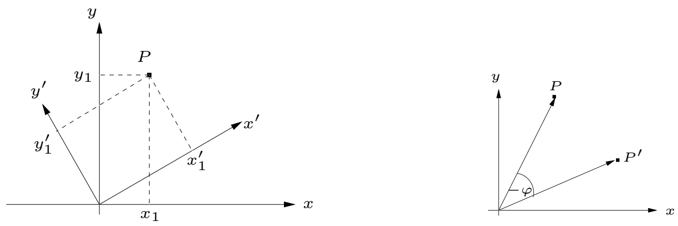

Abbildung 3.11:

b) Veränderung des Punktes

Das Koordinatensystem bleibt fest, der Punkt wird transformiert. Die Transformationsformel für die Drehung eines Punktes, bzw. dessen Ortsvektors, wobei das Koordinatensystem fix bleibt, lautet (siehe Abb. 3.11):

$$\vec{x}\,' = T^T \cdot \vec{x} \tag{3.18}$$

Bemerkung 33. Einer Drehung des Koordinatensystems um den Winkel φ (bei festgehaltenem Punkt P) entspricht eine Drehung des Punktes P (bei festgehaltenem Koordinatensystem) um den Winkel $-\varphi$.

Beispiel 50. Wir betrachten die Drehung eines Punktes, wobei das Koordinatensystem fix bleibt. Gegeben ist der Punkt P mit den Koordinaten $\vec{x} = \binom{1}{2}$, der um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gedreht wird. Die einzelnen Schritte der Berechnung sind:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left(T^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = T$$

$$\vec{x}\,' = T^T \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,71 \\ 2,12 \end{pmatrix}$$

3.9 Orthogonale Matrizen

3.9.1 Orthogonale Matrizen und Drehungen

Definition 39. Eine Matrix $T \in M(n \times n)$ heißt **orthogonal**, falls gilt:

$$T^T = T^{-1} \tag{3.19}$$

Bemerkung 34.

1. Wenn T orthogonal ist, folgt daraus: $\Longleftrightarrow \quad T \cdot T^T = T^T \cdot T = I$
2. Mit T sind auch die Matrizen T^{-1} und T^T orthogonal.
3. Wenn T orthogonal ist, so ist die Determinante $\det T = \pm 1$