Beispiel 107.

$$I = \int (\cos x)^2 \sin x \; dx$$

Substitution: $u = \cos x \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\sin x$

$$I = -\int (\underbrace{\cos x}_{u})^2 \underbrace{(-\sin x)}_{\frac{du}{dx}} \; dx = -\int u^2 \frac{du}{dx} \; dx = -\int u^2 \; du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Beispiel 108.

$$I = \int f(ax+b) \; dx$$

Substitution: $u = ax + b \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = a$

$$I = \frac{1}{a}\int f(ax+b)a \; dx = \frac{1}{a}\int f(u)\frac{du}{dx} \; dx = \frac{1}{a}\int f(u) \; du = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \; ,$$

wenn F eine Stammfunktion von f ist.

Beispiel 109.

$$I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \; dx$$

Substitution: $u = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = f'(x)$

$$I = \int \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \; dx = \int \frac{1}{u} \; du = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

Bemerkung 55. Es gilt

$$\int \frac{1}{x} \; dx = \ln|x| + C$$

Beweis: Mit

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für} \quad x > 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

erhält man für die Funktion $\varphi(x) = \ln|x|$ (siehe Abb. 6.1) und ihre Ableitung folgende Darstellungen

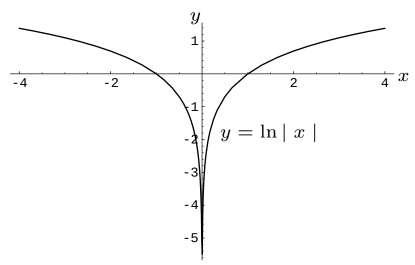

Abbildung 6.1: Logarithmus

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln x & \text{für} \quad x > 0 \\ \ln(-x) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \quad , \quad \varphi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \quad , \quad \varphi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{1}{x} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad x \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) = \int \frac{1}{x} \; dx = \ln|x| + C$$