ν stellt in dieser Gleichung die Frequenz, ω die Kreisfrequenz dar. Durch Einsetzen der Lösung in die Differentialgleichung kann leicht eine Kontrolle über die Richtigkeit gemacht werden.

$$\begin{aligned} &\dot{x} = C_1 \cos\big(\omega\,(t+C_2)\big)\omega \qquad , \qquad \ddot{x} = -C_1\omega^2 \sin\big(\omega\,(t+C_2)\big) \\ \text{Dgl.:}\quad &\underbrace{m\,(-C_1\omega^2)}_{-c\cdot C_1}\sin\big(\omega\,(t+C_2)\big) + c\cdot C_1\sin\big(\omega\,(t+C_2)\big) = 0 \\ &c\cdot C_1\sin\big(\omega\,(t+C_2)\big) = c\cdot C_1\sin\big(\omega\,(t+C_2)\big) \qquad \text{w.A.} \end{aligned}$$

Abbildung 8.1:

Beispiel 144. Gesucht ist die Kurve $y = y(x)$, für die die Tangentenlänge im Punkt P stets gleich der Strecke $\overline{OP}$ (s. Abb. 8.1 rechts) ist. Es gelten folgende Bedingungen:

1) $l = \sqrt{x^2+y^2}$

2) $\sin\varphi = \frac{y}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad y = l\sin\varphi$

3) $\tan\varphi = y'(x)$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\frac{1}{\cos\varphi}} = \frac{\tan\varphi}{\frac{\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}}{\sqrt{\cos^2\varphi}}} = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{\tan^2\varphi+1}} = \frac{y'(x)}{\sqrt{y'^2(x)+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad y = l\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y'^2+1}\cdot\frac{y}{y'} \qquad \Big|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(x^2+y^2\right)y'^2 = \left(y'^2+1\right)y^2$$

$$x^2y'^2 = y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y'^2 = \frac{y^2}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \pm\frac{y}{x}$$

Für diese zwei Differentialgleichungen erster Ordnung ergeben sich folgende zwei Lösungen:

1. $y' = \frac{y}{x}$ Lösung: $y = cx \quad c \in R$, Probe: $y' = c$ Dgl: $c = \frac{cx}{x} = c$ w.A.
   Als Lösung ergibt sich somit eine Geradenschar durch den Ursprung.

2. $y' = -\frac{y}{x}$ Lösung: $y = \frac{c}{x} \quad c \in R$, Probe: $y' = -\frac{c}{x^2} = -\frac{\frac{c}{x}}{x}$ w.A.
   Die Lösung stellt eine Hyperbelschar dar.

Definition 73. Unter der **Lösung** einer Differentialgleichung n-ter Ordung verstehen wir eine Funktion, die n-mal stetig differenzierbar ist, und die, in die Differentialgleichung eingesetzt, diese identisch erfüllt.

Allgemein stellt sich bei solchen Differentialgleichungen die Frage, wie eine entsprechende Lösung gefunden werden kann. Es können dafür verschiedene Lösungswege betrachtet werden:

1) Elementare Typen von Differentialgleichungen: Für gewisse "elementare" Differentialgleichungen gibt es Lösungsverfahren.