Beispiel 207. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x \cos y}{x} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(siehe Abb. 11.7)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \cos y}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x} \cos y = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{y\to 0} \cos y}_{=1} = 1$$

$$\text{mit } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{l'Hosp.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Dieses Funktion ist im Punkt $(0,0)$ nicht stetig. Sie ist stetig, falls gilt: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$
Wir erhalten also eine stetige Funktion, wenn wir festsetzen:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x \cos y}{x} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

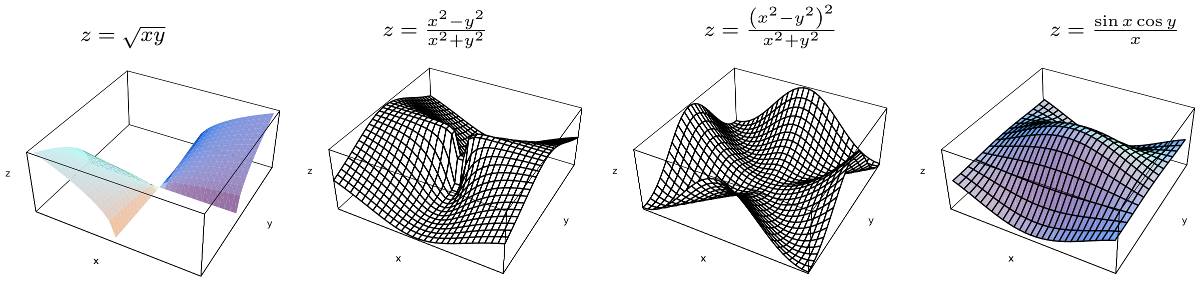

Abbildung 11.7:

11.3 Die partielle Ableitung

11.3.1 Einführung

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ in einer Variablen wurde in Abschnitt 5.1 definiert als

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Für **die Ableitung einer Funktion in zwei Variablen** stellen wir folgende Überlegungen an:

- Wir schneiden die Fläche $z = f(x,y)$ mit der Ebene $x = x_0$ (parallel zur yz-Ebene) und projizieren diese Schnittkurve in die yz-Ebene. Wir erhalten damit eine Funktion, die nur mehr von y abhängig ist, und mit
$$z = f(x_0,y) = \psi(y)$$
die Darstellung einer Kurve in der yz-Ebene (siehe Abb. 11.8). Die Steigung der Tangente an diese Kurve ergibt sich damit zu
$$\frac{d\psi}{dy}(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\psi(y_0+k) - \psi(y_0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$
Dieser Ausdruck stellt die **partielle Ableitung von** $f(x,y)$ **nach** y an der Stelle (x_0,y_0) dar.