5.6.2 Die Potenzfunktion, die Exponentialfunktion

Definition 57.

Die Potenzfunktion:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^\alpha \;, & & \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Die Exponentialfunktion:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x \longmapsto a^x \;, & & a \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Diese Funktion ist für $\begin{cases} a > 1 & \text{streng monoton steigend.} \\ a = 1 & \text{eine konstante Funktion } y = f(x) \equiv 1. \\ 0 < a < 1 & \text{streng monoton fallend.} \end{cases}$

Geometrische Darstellung der Funktion in Abb. 5.15.

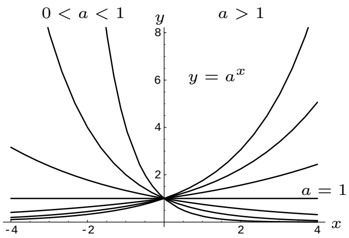

Abbildung 5.15: Die Exponentialfunktion

5.6.3 Die Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ergibt sich als Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion. Sie existiert, da die Exponentialfunktion streng monoton und stetig ist auf dem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Definition 58. Der **Logarithmus:**

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y = a^x \longmapsto x = \log_a y & & \end{array}$$

Rechenregeln: $\log_a x \equiv \log x$

$$\log(y_1 \cdot y_2) = \log y_1 + \log y_2 \quad , \quad \log \frac{y_1}{y_2} = \log y_1 - \log y_2 \quad , \quad \log y^z = z \log y$$

Logarithmen mit speziellen Basen:
Einige Basen haben besondere Bedeutung, für den zugehörigen Logarithmus existiert eine eigene Schreibweise, die wie folgt definiert sind.

$a = 10$	$\log_{10} y = \lg\, y$	dekadischer Logarithmus
$a = e$	$\log_e y = \ln\, y$	natürlicher Logarithmus
$a = 2$	$\log_2 y = \mathrm{ld}\, y$	dualer Logarithmus

Definition 59. Die EULER'sche Zahl e ist definiert als Grenzwert

$$e := \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Ihr numerischer Wert ist $e \approx 2,71828\ldots$