Sei im folgenden eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ angenommen, für die die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen ist.
Weiters muss gelten: $f'(x) \neq 0$
Betrachten wir den Mittelwertsatz unter der Annahme dass $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$, so müssen im Intervall [a,b] Nullstellen vorliegen (siehe Abb. 9.6).

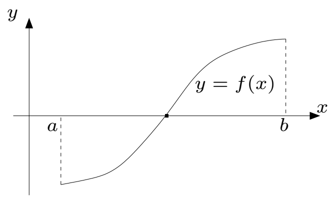

Abbildung 9.6:

Vorgangsweise

1) Errichte in $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a,b)$ die Tangente an die Kurve

$$t_0 : \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

2) Ermittle den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse $(y = 0)$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

3) Tangente an die Kurve im Punkt $(x_1, f(x_1))$

$$t_1 : \quad y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

4) Ermittle den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse $(y = 0)$

$$\Longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

5) Wiederhole diesen Vorgang bis zur gewünschten Genauigkeit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.2}$$

Man erhält eine Folge von Werten $\{x_n\}$.

Bemerkung 77. (ohne Beweis)
Die Folge $\{x_n\}$, definiert durch $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, nähert sich (im allgemeinen) unter den getroffenen Voraussetzungen einer Zahl $\tilde{x}$ mit $f(\tilde{x}) = 0$ beliebig genau. D.h. $\tilde{x}$ ist eine Nullstelle der Funktion $f(x)$.

9.4.1 Der Fixpunkt

Definition 78. Unter einem **Fixpunkt** einer Funktion $\varphi(x)$ versteht man ein $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\varphi(x) = x \qquad \text{d.h. } x \text{ wird auf sich selbst abgebildet}$$