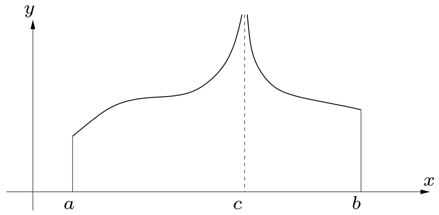

Abbildung 7.13:

Der CAUCHY'sche Hauptwert

Der Grenzübergang wird nicht getrennt durchgeführt, sondern gekoppelt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right) \tag{7.6}$$

Die Annäherung erfolgt hier gleichzeitig von rechts und links. Dieser Wert wird als **Hauptwert des uneigentlichen Integrals 1. Art** oder als CAUCHY**'scher Hauptwert** bezeichnet.

Beispiel 133. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ (s. Abb. 7.14)

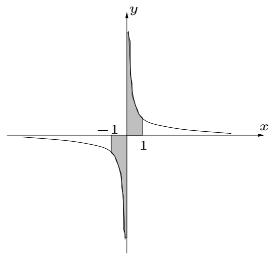

Abbildung 7.14:

1. Fall: Berechnung nach Formel (7.5)

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \lim_{\eta\to 0^+}\int_{\eta}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right) + \lim_{\eta\to 0^+}\left(\ln x\Big|_{\eta}^{1}\right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln\varepsilon - \ln 1) + \lim_{\eta\to 0^+}(\ln 1 - \ln\eta) = -\infty + \infty$$

Dies ist ein unbestimmter Ausdruck. (Der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der x-Achse ist ja nicht endlich!)

2. Fall: Berechnung nach Formel (7.6)

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = 0$$

Der CAUCHY'sche Hauptwert ist somit Null.