$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

$$e^x \approx 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

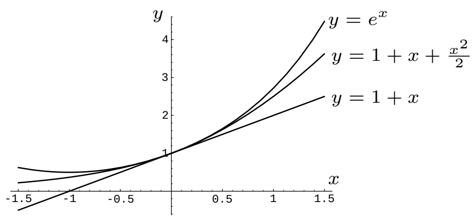

Abbildung 9.19:

Bemerkung 78. Wie aus Abb. 9.19 gut ersichtlich ist, stellt die Approximation $\varphi_2(x)$ zweiter Ordnung in $U(x_0)$ eine bessere Annäherung der Funktion $f(x) = e^x$ dar.

Achtung. Eine "gute" Annäherung ist immer nur in einem "kleinen" Intervall um x_0 möglich!

Approximation durch ein Polynom n-ten Grades $\varphi_n(x)$

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n}_{\varphi_n(x)}$$

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \varphi_n(x_0) = f(x_0) && \Longrightarrow \quad f(x_0) \\
f'(x_0) &= \varphi_n'(x_0) = a_1 && \Longrightarrow \quad a_1 = f'(x_0) \\
f''(x_0) &= \varphi_n''(x_0) = 2a_2 && \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \\
&\vdots && \vdots \\
f^{(n)}(x_0) &= \varphi_n^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n && \Longrightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}
\end{aligned}$$

$$\text{allgemeines Glied: } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{9.8}$$

9.6.2 Die Taylor-Entwicklung einer Funktion

Als Voraussetzung gelte, dass die Funktion f im betrachtetene Intervall $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar sei.

Definition 80. Das Polynom in (9.8)

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heisst **Taylor-Polynom** der Funktion $f(x)$ mit dem **Entwicklungspunkt** x_0.