



Abbildung 9.18:

einen gewissen Einfluss auf den Funktionswert. Dieser Fehler des Funktionswertes wird durch

$$\Delta f = f(x_0) - f(\tilde{x})$$

angegeben.

Der absolute Fehler  $\Delta f$  wird approximiert durch das entsprechende Differential:

$$\Delta f \approx f'(x_0) \cdot (x_0 - \tilde{x})$$

bzw.

$$|\Delta f| \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x| \quad (9.6)$$

$\Delta x, \Delta f$  ..... absoluter Fehler,  $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta f}{f}$  ..... relativer Fehler

**Beispiel 171.** Will man den Flächeninhalt  $A$  eines Quadrats bestimmen, so ordnet man der Seitenlänge  $x$  den Inhalt  $A = x^2$  zu, es handelt sich also um eine Funktion  $A = f(x) = x^2$ .

Die Messung der Seitenlänge  $x$  kann nun beispielsweise den Wert  $10 \pm 10^{-2}$  Meter ergeben. Wir erhalten also:  $x_0 = 10m$ ,  $\Delta x = 10^{-2}m$

Es stellt sich nun die Frage, wie genau der Flächeninhalt ermittelt werden kann?

$$\Rightarrow \text{relativer Fehler: } \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{0,01}{10} = 0,1\%$$

Die Berechnung erfolgt mittels Formel (9.6):

$$\begin{aligned} |\Delta f| &\approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x| \\ f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x &\Rightarrow f'(x_0) = 2 \cdot 10 = 20 \Rightarrow \Delta f \approx 20 \cdot 0,01 = 0,2 \\ A_{\text{ges}} = A \pm \Delta A = 100 \pm 0,2m^2, \quad \text{relativer Fehler: } \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{0,2}{100} = 0,2\% \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stellt jedoch nur den näherungsweisen Fehler dar. Die exakte Ermittlung wird wie folgt durchgeführt:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= (10 + 0,01)^2 = 100,2001m^2 \\ f(x_0 - \Delta x) &= (10 - 0,01)^2 = 99,8001m^2 \end{aligned} \quad \text{d.h. } 99,8001 \leq A \leq 100,2001m^2$$

#### 9.5.4 Rechenregeln für Differentiale

Differential:  $df|_{x_0}(\bar{x}) = \bar{y}$  oder  $df|_{x_0}(dx) = dy \Rightarrow dy = f'(x_0) \cdot dx$

Schreibweise:  $dy = f'(x) \cdot dx$  oder  $df = f'(x) \cdot dx$

##### Rechenregeln

##### 1) Summe von Funktionen:

$$d(f + g) \Rightarrow (f + g)'dx = f'dx + g'dx = df + dg$$