In der Schreibweise mittels Differential kann die lineare Approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{9.5}$$

jetzt geschrieben werden als

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + dy$$

Für die in Beispiel 166 betrachtete Funktion $f(x) = \sqrt{x+3}$ gilt:

$$dy = f'(x)dx = \frac{dx}{2\sqrt{x+3}}$$

Für $x = 1$ und $dx = \triangle x = 0.05$ folgt

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1+3}} = 0.0125$$

und $\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$ wie wir es in Beispiel 166 gefunden haben.

9.5.3 Anwendungen

Näherungsrechnung

Beispiel 169. $f(x) = \sin x \quad , \quad x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \cos x$
Die Berechnung wird nach Relation (9.5) durchgeführt, wobei hier $x = x_0 + h$ verwendet wird.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &\approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \\ f(x_0 + h) = \sin(0 + h) &\approx \sin 0 + \cos 0 \cdot h \\ \sin h &\approx h \qquad \text{gilt für: } h \ll 1 \end{aligned}$$

D.h. für “sehr kleines” h kann $\sin h$ durch h ersetzt werden. Siehe Abb. 9.16.

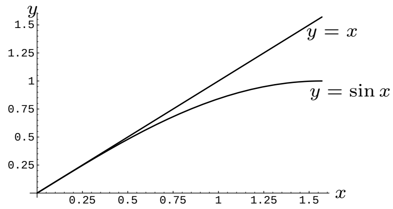

Abbildung 9.16: $\sin x \approx x$

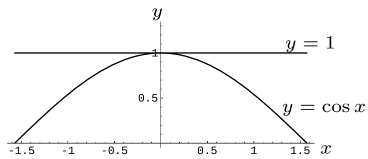

Abbildung 9.17: $\cos x \approx 1$

Beispiel 170. $f(x) = \cos x \quad , \quad x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
Die Berechnung wird wieder gemäß(9.5) durchgeführt.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &\approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \\ f(x_0 + h) = \cos(0 + h) &\approx \cos 0 + (-\sin 0) \cdot h \\ \cos h &\approx 1 \qquad \text{gilt für: } h \ll 1 \end{aligned}$$

D.h. für “sehr kleines” h kann $\cos h$ durch 1 ersetzt werden. Siehe Abb. 9.17.

Fehlerrechnung

Gegeben ist eine stetig differenzierbare Funktion $f(x)$. Man misst die unabhänige Variable x mit einem gewissen Messfehler. Wird statt des exakten Wertes x_0 der Näherungswert $\tilde{x}$ gemessen, so hat dieser Messfehler

$$\Delta x = x_0 - \tilde{x}$$