c) Der Areatangens Hyperbolicus:

$$\overbrace{f:\mathbb{R}\longrightarrow(-1,1)}^{\text{Funktion: } \tanh x} \qquad \overbrace{f^{-1}:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}}^{\text{Umkehrfunktion: } \operatorname{artanh} y}$$

$$x\longmapsto y=\tanh x \qquad y=\tanh x\longmapsto x=\operatorname{artanh} y$$

d) Der Areacotanges Hyperbolicus:

$$\overbrace{f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus[-1,1]}^{\text{Funktion: } \coth x} \qquad \overbrace{f^{-1}:\mathbb{R}\setminus[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{0\}}^{\text{Umkehrfunktion: } \operatorname{arcoth} y}$$

$$x\longmapsto y=\coth x \qquad y=\coth x\longmapsto x=\operatorname{arcoth} y$$

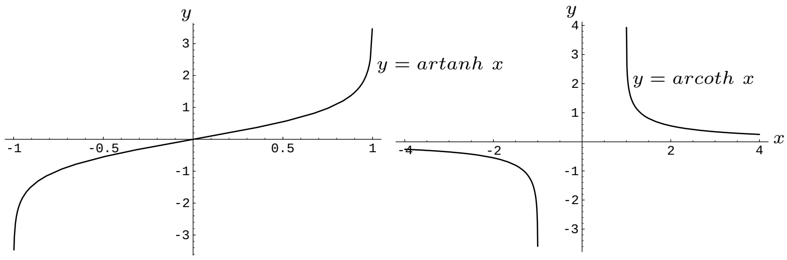

Abbildung 5.20: artanh x und arcoth

5.8.1 Darstellung der hyperbolischen Funktionen mittels der Logarithmusfunktion

a) arsinh x**:**

$$\begin{aligned} y=\sinh x &= \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad |\cdot 2e^x \\ 2ye^x &= e^{2x}-1 \\ e^{2x}-2ye^x-1&=0 \qquad \text{Setze: } e^x=u \\ u^2-2yu-1&=0 \\ u=e^x &= y\pm\underbrace{\sqrt{y^2+1}}_{>y} \end{aligned}$$

Da e^x nur positive Werte annimmt, ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$x=\operatorname{arsinh} y=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

b) arcosh x**:**

$$\begin{aligned} y=\cosh x &= \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad |\cdot 2e^x \\ 2ye^x &= e^{2x}+1 \\ e^{2x}-2ye^x+1&=0 \qquad \text{Setze: } e^x=u \\ u^2-2yu+1&=0 \\ u=e^x &= y\pm\sqrt{y^2-1} \end{aligned}$$

$$x=\operatorname{arcosh} y=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$