Abbildung 7.3: Äquidistante Zerlegung bzw. fortlaufende Halbierung

Definition 65. Eine Folge $\left\{Z^{(k)}\right\}$ von Zerlegungen heißt **ausgezeichnete Zerlegungsfolge**, falls gilt:

$$\lim_{k\to\infty} L\left(Z^{(k)}\right) = 0$$

Sowohl die äquidistante, als auch die Zerlegung durch fortlaufende Halbierung sind ausgezeichnete Zerlegungsfolgen.

Definition 66. Das **bestimmte Integral** einer Funktion f im Intervall $[a,b]$ ist der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{k\to\infty} R\left(f; Z^{(k)}; \xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_{N_k}^{(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N_k} f\left(\xi_n^{(k)}\right) \cdot \Delta x_n^{(k)} \tag{7.2}$$

wobei $Z^{(k)}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge durchläuft und $\xi_n^{(k)}$ die zugehörigen Zwischenpunkte sind.
Eine auf diesem Intervall $[a,b]$ definierte Funktion f heißt **integrierbar** im RIEMANN'schen Sinn, falls für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\left\{Z^{(k)}\right\}$ mit

$$Z^{(k)}: \; a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{N_k}^{(k)} = b$$

mit den Zwischenpunkten $\xi_n^{(k)}$ für $n = 1, 2, \ldots, k$, der Grenzwert in (7.2) existiert.

Satz 34. *Jede auf dem Intervall $[a,b]$ stückweise stetige Funktion f ist integrierbar, d. h. der Grenzwert existiert.*

Bemerkung 59. Stückweise stetig heißt, dass sich die Funktion f aus einer endlichen Anzahl von stetigen Stücken zusammensetzen lässt (s. Abb. 7.4).

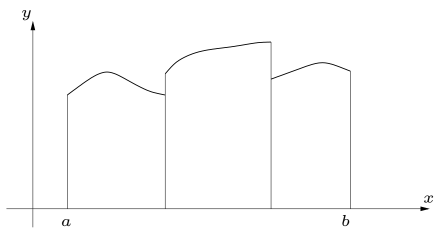

Abbildung 7.4: Stückweise stetige Funktion

Bemerkung 60. Ist $f(x) \geq 0$, so ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gleich dem Flächeninhalt unter der Kurve im Intervall $[a,b]$.

Bemerkung 61. Beim allgemeinen Fall des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ist beim Aufsummieren auf die Vorzeichen zu achten (negative Flächen unter der $x-$Achse). Somit ergibt sich für den Flächeninhalt (s. Abb. 7.5):

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$