die einen Näherungswert des gesuchten Integrals $\int_a^b f(x)\ dx$ darstellt. Dieser Näherungswert wird als Rechteckssumme bezeichnet. Eine Fehlerabschätzung ergibt:

$$\left| R_N(f,Z) - \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \text{const}(f)\frac{1}{N}$$

Man bezeichnet daher die Rechtecksregel als ein **Verfahren 1. Ordnung**, da der Fehler indirekt proportional zu $N$ ist.

### 7.7.2 Die Simpson'sche Regel

Ausgangspunkt für diese Regel ist die sogenannte Kepler'sche Fassformel $A = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ bei der das Intervall $[a,b]$ in nur zwei Teilintervalle zerlegt wird (siehe Abb. 7.24, links).
$Z:\ a = x_0 < x_1 = \frac{a+b}{2} < x_2 = b$

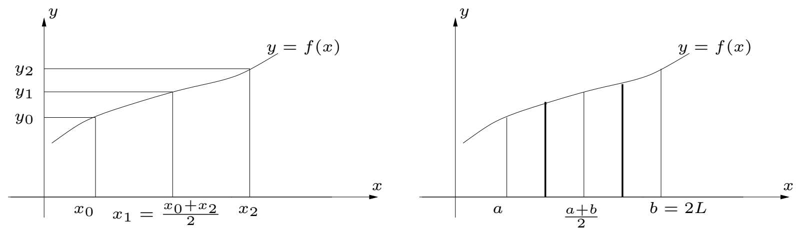


Abbildung 7.24:

Für die Berechnung der Fläche nach der Simpson'schen Regel wird das Intervall $[a,b]$ in $2L$ äquidistante Teilintervalle zerlegt (siehe Abb. 7.24 rechts). Auf jedes dieser Teilintervalle wird nun die Kepler'sche Fassformel angewendet. Eine Voraussetzung ist, dass die Funktion $f$ dreimal stetig differenzierbar ist.

$$A_L = \frac{b-a}{6L} \cdot (y_0 + y_{2L} + 4y_1 + 4y_3 + \cdots + 4y_{2L-1} + 2y_2 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2L-2}) \tag{7.10}$$

Der Fehler ergibt sich aus:

$$\left| A_L - \int_a^b f(x)\ dx \right| \quad \leq \quad \text{const}(f)\frac{1}{L^4} \qquad , \qquad \text{const}(f) = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right| \frac{(b-a)^5}{2880}$$

**Bemerkung 68.** Für Polynome dritten Grades ergibt sich somit bereits eine **exakte** Bestimmung des Flächeninhaltes!