Satz 11. *Jeder beliebige Vektor* $\overrightarrow{OP}$ *im* $\mathbb{R}^n$ *kann in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren* $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ *dargestellt werden:*

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_n\vec{b}_n$$

Die reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ *nennt man die* ***Koordinaten*** *des Vektors* $\overrightarrow{OP}$ *bezüglich der Basis* $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ *, der Vektor*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

heißt ***Koordinatenvektor*** *von* $\overrightarrow{OP}$ *bezüglich der Basis* $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ *.*

Beispiel 47.
Gegeben seien die Basis $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$ und der Vektor $\overrightarrow{OP} = \binom{1}{2} \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{OP} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 \qquad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gegeben sei die Basis $\vec{b}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{b}_2 = \binom{1}{1}$ und der Vektor $\overrightarrow{OP} = \binom{1}{2} \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{OP} = -1 \cdot \vec{b}_1 + 2 \cdot \vec{b}_2 \qquad \Longrightarrow \quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

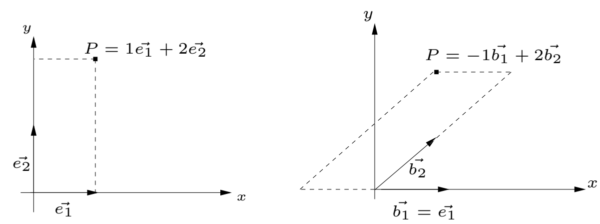

Abbildung 3.8:

Definition 38. Unter einer **Koordinatentransformation** versteht man den Übergang von einer Basis $\left(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\right)$ auf eine neue Basis $(\vec{b}\,'_1, \dots, \vec{b}\,'_n)$. Durch eine Koordinatentransformation ändern sich die Koordinaten eines Vektors $\overrightarrow{OP}$.

Es stellt sich nun die Frage wie sich die Koordinaten ändern?

a) Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^2$

Gegeben sei ein Punkt P mit dem Koordinatenvektor $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ im alten Koordinatensystem $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_2)$. Derselbe Punkt hat im neuen Koordinatensystem $(\vec{b}\,'_1, \dots, \vec{b}\,'_2)$ den Koordinatenvektor $\vec{x}\,' = \binom{x'_1}{x'_2}$, d.h. es gilt

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 \qquad , \qquad \overrightarrow{OP} = x'_1\vec{b}\,'_1 + x'_2\vec{b}\,'_2$$

Gesucht ist nun der Zusammenhang zwischen den alten Koordinaten $\vec{x}$ und den neuen Koordinaten $\vec{x}\,'$.