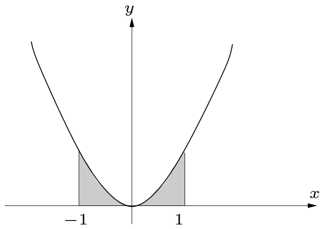


Abbildung 7.10:

**Beispiel 126.** Gesucht ist die Fläche zwischen der Parabel $y = x^2$ und der $x$-Achse im Intervall $[-1, 1]$ (s. Abb. 7.10):

$$\int_{-1}^{1} x^2 \; dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

**Bemerkung 63.** Die Stammfunktion $F$ zu $f$ ist nur bis auf eine additive Konstante $C$ bestimmt. (Siehe Mathematik 1/1, Integralrechnung Teil 1).

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{x^2}_{f(x)} \; dx = \underbrace{\left(\frac{x^3}{3} + C\right)}_{F(x)}\bigg|_{-1}^{1} = \underbrace{\left(\frac{1^3}{3} + C\right)}_{F(1)} - \underbrace{\left(\frac{(-1)^3}{3} + C\right)}_{F(-1)} = \frac{2}{3}$$

Wie aus dem Beispiel ersichtlich ist, hat die additive Konstante keine Auswirkungen auf das Ergebnis.

**Beispiel 127.** Gesucht ist die Fläche zwischen einem Halbkreis und der $x$-Achse im Intervall $[-R, R]$ (s. Abb. 7.11):
Aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = R^2$ erhält man: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

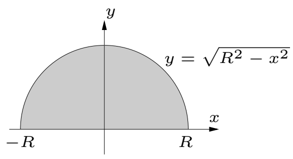


Abbildung 7.11:

$$\begin{aligned} A_H = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \; dx &= \left\{ \frac{R^2}{2} \left[ \arcsin \frac{x}{R} + \frac{x}{R^2} \sqrt{R^2 - x^2} \right] \right\} \bigg|_{-R}^{R} \\ &= \frac{R^2}{2} \left[ \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\frac{R}{R^2} \sqrt{R^2 - R^2}}_{=0} \right] - \frac{R^2}{2} \left[ \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\frac{R}{R^2} \sqrt{R^2 - R^2}}_{=0} \right] \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{R^2 \pi}{2} \end{aligned}$$

Für die gesamte Fläche des Kreises ergibt sich die bereits bekannte Formel: $A_K = R^2 \pi$

**Beispiel 128.** Gesucht ist die Fläche zwischen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und der $x$-Achse im Intervall $[1, a]$ wobei $a > 1$ ist:

$$A = \int_{1}^{a} \frac{1}{x} \; dx = \ln x \bigg|_{1}^{a} = \ln a - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln a$$