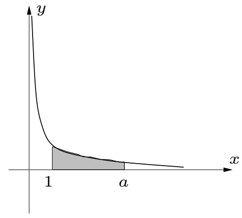

Abbildung 7.12:

7.1.5 Weitere Regeln für die bestimmten Integrale

a) Die partielle Integration

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ dx \tag{7.3}$$

Beispiel 129.

$$I = \int_0^1 xe^x\ dx \quad , \quad u = x \implies u' = 1 \quad , \quad v' = e^x \implies v = e^x$$

$$I = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx = e - 0 - [e^x]\Big|_0^1 = e - [e-1] = 1$$

b) Die Substitutionsregel

$$\int_{t=\alpha}^{\beta} f\big(u(t)\big)\ \frac{du}{dt}\ dt = \int_{u=a}^{b} f(u)\ du \qquad \text{mit} \begin{array}{l} a = u(\alpha) \\ b = u(\beta) \end{array} \tag{7.4}$$

Bemerkung 64. $u(t)$ muss eindeutig umkehrbar sein, d.h. stetig und streng monoton fallend bzw. wachsend.

Bemerkung 65. Man erspart sich die Rücksubstitution, da auch die Grenzen mitsubstituiert werden können.

Beispiel 130. $\int_{x=1}^{3} 2\sqrt{2x+1}\ dx$
Substitution: $2x + 1 = u \implies \frac{du}{dx} = 2 \implies dx = \frac{du}{2}$
Somit erhält man für die Integrationsgrenzen: $x_0 = 1 \longleftrightarrow u_0 = 3$
$x_1 = 3 \longleftrightarrow u_1 = 7$

$$\int_{u=3}^{7} \sqrt{u}\ du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\Big|_3^7 = \frac{2}{3}\left(7^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right)$$

7.2 Die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad \text{existiert für} \quad \begin{cases} f & \text{stetig auf} \quad [a,b] \\ a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beispiel 131. Gesucht ist die Fläche zwischen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und der x-Achse im Intervall $[0,1]$: Da $\frac{1}{x}$ in $x_0 = 0$ nicht definiert ist, ist f nicht stetig im Intervall $[0,1]$. Die formale Rechnung liefert:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ dx = \ln x\Big|_0^1 = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \underbrace{\ln 0}_{-\infty} = \infty$$