Beispiel 158. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left(\infty^0\right) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Beispiel 159. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\frac{\alpha}{x})}{\frac{1}{x}}\right) = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{l'Hosp}}{=} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{x}}\left(-\frac{\alpha}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{x}} = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

Speziell für $\alpha = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

9.2 Lokale Extrema und Monotonie

Definition 76. Für eine im Intervall $[a,b]$ differenzierbare Funktion f sei m das Minimum und M das Maximum im Intervall $[a,b]$ (globales Minimum, globales Maximum).

- $x_1 \in (a,b)$ ist die Stelle eines **relativen** oder **lokalen Minimums** m_1, falls es eine Umgebung $U(x_1)$ gibt, mit der Eigenschaft $f(x) \geq f(x_1) \quad \forall\, x \in U(x_1)$.
- $x_2 \in (a,b)$ ist die Stelle eines **relativen** oder **lokalen Maximums** M_1, falls es eine Umgebung $U(x_2)$ gibt, mit der Eigenschaft $f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\, x \in U(x_2)$.

Bemerkung 74. Das Maximum oder das Minimum einer auf $[a,b]$ definierten Funktion, tritt entweder als **Randminimum oder Randmaximum** oder als **größtes relatives Maximum bzw. Minimum** auf.

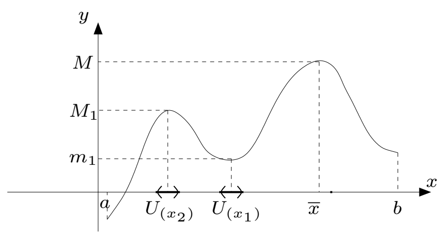

Abbildung 9.1: Lokale und globale Extrema

Satz 40. *Ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum) x_0 einer differenzierbaren Funktion im Inneren von (a,b) erfüllt die Gleichung:*

$$f'(x_0) = 0 \qquad \textit{d.h. die Tangente in } x_0 \textit{ ist horizontal!}$$

Bemerkung 75. Die Bedingung $f'(x) = 0$ für eine horizontale Tangente ist keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum.

Beispiel 160. $y = x^3$ hat in $x_0 = 0$ eine horizontale Tangente.

$$f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f'(x_0) = 0$$

Hier liegt jedoch kein lokales Extremum vor, da $f'(x_0) = 0$ keine hinreichende Bedingung ist.