Bemerkung 11. Man kann bei einem System von k linear abhängigen Vektoren $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ einen Vektor als Linearkombination der übrigen darstellen. Das heißt: Es existiert ein $i \in \{1, \ldots, k\}$, so dass

$$\vec{x}_i = -\frac{1}{\lambda_i} (\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \vec{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \vec{x}_{i+1} + \cdots + \lambda_k \vec{x}_k)$$

Beispiel 15. Siehe Beispiel 14:

$$\vec{x}_3 = 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 \quad , \quad \vec{x}_1 = -\frac{1}{2}(3\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \quad , \quad \vec{x}_2 = -\frac{1}{3}(2\vec{x}_1 - \vec{x}_3)$$

Bemerkung 12. Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig (siehe Abb. 3.5):
$\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ mit $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$

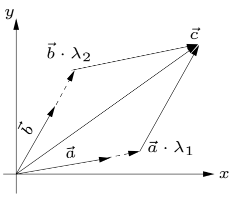

Abbildung 3.5:

$$\Longrightarrow \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} - 1\vec{c} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots \text{sind linear abhängig}$$

Im $\mathbb{R}^2$ können höchstens zwei Vektoren linear unabhängig sein.

Bemerkung 13. Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Ortsvektoren parallel sind:
$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{O}$ mit $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{b} \qquad \text{oder} \qquad \vec{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{a}$$

Bemerkung 14. Drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene im Raum liegen, die den Ursprung enthält.

Bemerkung 15. Der Nullvektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ ist linear abhängig von allen anderen Vektoren, denn es gilt:

$$1 \cdot \vec{O} + 0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_k = \vec{O}$$

Definition 19.

- Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum heißt **Dimension** des Vektorraumes V $(= \dim V)$.
- Sei m die Dimension von V, dann heißt ein System $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ von linear unabhängigen Vektoren **Basis** von V.

Schreibweise:

$$\dim V = m$$

Beispiel 16. Gegeben sei die Ebene $E_2(\stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^2)$, die die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{O}, \vec{b} \neq \vec{O}$, enthält. Die beiden Vektoren sind nicht parallel zueinander.
$\Longrightarrow$ Sie sind stets linear unabhängig.

$$\Longrightarrow \qquad \dim \mathbb{R}^2 = 2$$