Durch Aufsummieren der einzelnen approximierenden Mantelteilflächen ergibt sich die RIEMANN'sche Summe:

$$R(f,Z) = M = \sum_{i=1}^{N_k} 2\pi \cdot f(\xi_i) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Bei Rotation der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse erhalten wir folgende Oberfläche:

$$O_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx \tag{7.8}$$

Bei Rotation der Kurve $x = \varphi(y)$ um die y-Achse erhalten wir folgende Oberfläche:

$$O_y = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \cdot \sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\, dy \tag{7.9}$$

Beispiel 142. Gesucht ist die Oberfläche der durch Rotation der Kreislinie $a^2 = x^2 + y^2$ um die x-Achse entstehenden Kugel:

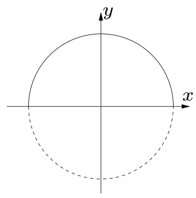

Abbildung 7.23:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$1 + {y'}^2 = 1 + \frac{(-x)^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

$$O = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}\, dx = 2\pi a \int_{-a}^{a} dx$$

Betrachtet man die Symmetrieeigenschaften der Kurve, so erhält man:

$$O = 2 \cdot 2\pi a \int_0^a dx = 4\pi a x\Big|_0^a = 4\pi a^2$$

7.7 Die numerische Integration

Unter Umständen kann es unmöglich sein, die Stammfunktion der Funktion $f(x)$ zu bestimmen, um das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ zu berechnen. Daher wurden verschiedene Näherungsverfahren entwickelt, die ohne Ermittlung der Stammfunktion auskommen.

7.7.1 Die Rechtecksregel

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion f. Um das Integral $\int_a^b f(x)\, dx)$ zu berechnen führt man eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ durch. Durch Aufsummieren erhält man eine spezielle RIEMANN'sche Summe,

$$R_N(f,Z) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$