Die Berechnung erfolgt nach der Formel $k = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

$$k = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

Singuläre Punkte treten dann auf, wenn die Bedingung $\dot{y} = 0$ und $\dot{x} = 0$ erfüllt ist.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = 0 : 1 - \cos t = 0 \iff \cos t = 1 \implies t = 2n\pi\,,\ n \in \mathbb{Z} \\ \dot{y} = 0 : \quad \sin t = 0 \iff t = m\pi\,,\quad m \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \implies t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$$

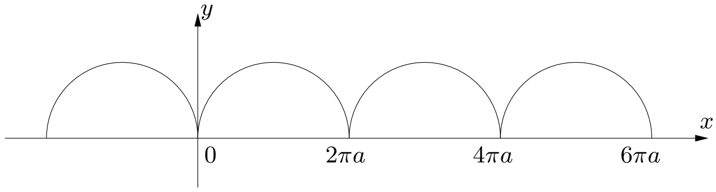


Abbildung 10.7: Zykloide

$$x(2\pi) = a(2\pi - \sin 2\pi) = 2a\pi \qquad , \qquad y(2\pi) = a(1 - \cos 2\pi) = 0$$

Für die Steigung der Tangente im Punkt $P = (0,0)$ gilt:

$$\lim_{t \to 0^+} k = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{\cos t}{\sin t} = \infty \quad \text{und analog} \quad \lim_{t \to 0^-} k = -\infty$$

Somit liegt im Punkt $P = (0,0)$ eine Spitze vor, sowie in jedem weiteren Punkt $P = (2na\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

**b) Die Bogenlänge**

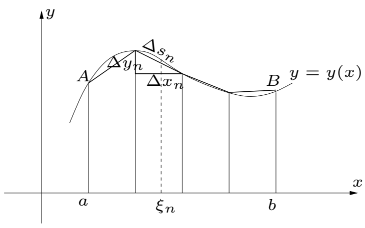


Abbildung 10.8:

**1) Für die Kurvendarstellung in kartesischen Koordinaten**

Die Bogenlänge einer auf dem Intervall $[a,b]$ definierten Kurve $y = f(x)$ kann angenähert durch die Länge des die Kurve approximierenden Polygonzuges angegeben werden (s. Abb. 10.8).

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} \qquad , \qquad \Delta y_n = y_n - y_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1})$$

$$\Delta s_n^2 = \Delta x_n^2 + \Delta y_n^2 = \left(1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2\right) \cdot \Delta x_n^2 \implies \Delta s_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2} \cdot \Delta x_n$$

Für die Bogenlänge folgt damit: $s \approx \sum_{n=1}^{N} \Delta s_n = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2} \cdot \Delta x_n$