Definition 52. Eine auf dem Intervall (a, b) definierte Funktion f heißt **auf dem Intervall** (a, b) **differenzierbar**, wenn sie für alle $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist. Die Ableitung ist dann wieder eine Funktion:

$$\begin{aligned} f' : \quad & (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto y = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} \end{aligned}$$

Definition 53. Eine auf (a, b) definierte Funktion, deren Ableitung eine auf (a, b) stetige Funktion ist, heißt **glatte Funktion**, den Graph nennt man dann eine **glatte Kurve**.

5.1.1 Bestimmung der Tangentengleichung und der Normalengleichung

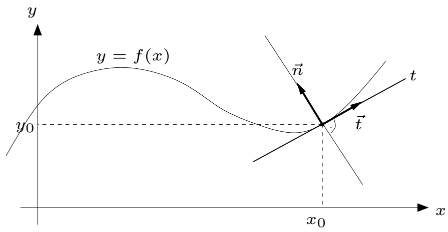

Abbildung 5.3: Tangente und Normale

1. Die Gleichung der Tangente:
   Wie bereits erwähnt, ist die Ableitung $f'(x_0)$ gleich der Steigung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Die Tangente t kann angegeben werden in der Form

$$\begin{aligned} t : \quad & y - y_0 = k_t(x - x_0) \\ & y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

2. Die Gleichung der Normalgeraden auf die Tangente ergibt sich schließlich über den Normalvektor[1] wie folgt:

$$\begin{aligned} n : \quad & y - y_0 = k_n(x - x_0) \\ & y - y_0 = \frac{1}{-f'(x_0)}(x - x_0) \end{aligned}$$

5.2 Die Berechnung der Ableitung

Beispiel 87. Der freie Fall
Wir gehen von der Bewegungsgleichung für den freien Fall aus. Der zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weg $s(t)$ ist gegeben durch $s(t) = \frac{gt^2}{2}$, wobei g die Erdbeschleunigung ist.
Um hier die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 zu ermitteln, muss die Ableitung in t_0 gebildet werden.

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{g}{2}t^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{t - t_0} = \frac{g}{2} \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \frac{g}{2} \lim_{t \to t_0} (t + t_0) = \frac{g}{2} \cdot 2 \cdot t_0 = g \cdot t_0$$

Somit ergibt sich als Geschwindigkeitsfunktion: $v(t) = \frac{ds(t)}{d(t)} = g \cdot t$

[1] Da der Richtungsvektor der Tangente $\vec{t} = \binom{1}{f'(x_0)}$ ist, ergibt sich der Normalvektor zu $\vec{n} = \binom{1}{-\frac{1}{f'(x_0)}}$.