$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(x-x_0)^k + \frac{e^{\vartheta_x}}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$
$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\frac{e^{\vartheta_x}}{(k+1)!}(x)^{k+1}}_{\to 0}$$

Damit erhält man die Taylorreihe für die Exponentialfunktion zu

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Beispiel 174. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$

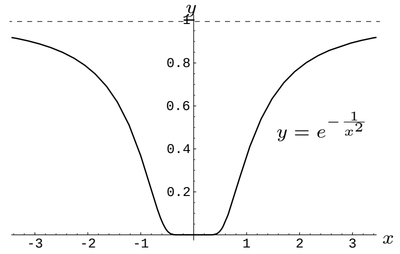

Abbildung 9.21:

Untersuchung auf Stetigkeit:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = f(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \text{Funktion ist stetig in } x_0 = 0 \ !$$

Die Bestimmung der Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\left(\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad f''(0) = 0$$
$$f^{k)}_{(x)} = \left(\frac{\alpha}{x^{2k}} + \cdots + \frac{\beta}{x^{k+2}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad f^{(k)}(0) = 0$$

$$f(x) = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 0 \qquad \ldots \quad \text{Widerspruch!}$$

Grund:

$$\lim_{n\to\infty} R_n \neq 0$$

Somit ist ersichtlich, dass nicht jede Funktion in eine Taylor-Reihe entwickelt werden kann, auch wenn sie $(n+1)$-mal stetig differenzierbar ist.

Bemerkung 80. Die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ stellt i.a. auf einem gewissen Intervall, dem sogenannten **Konvergenzintervall**, die Funktion $f(x)$ dar.