b) $y = f(x) = x^x$

$$y = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\ln x} \qquad , \qquad y' = \underbrace{e^{x\ln x}}_{x^x}\left(1\cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x\,(1+\ln x)$$

5.7 Die hyperbolischen Funktionen

5.7.1 Der Sinus Hyperbolicus und der Cosinus Hyperbolicus

Definition 60. Die Funktionen **Sinus Hyperbolicus** und **Cosinus Hyperbolicus** sind wie folgt definiert:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad , \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

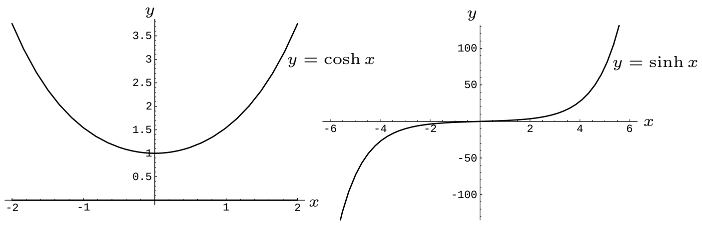

Abbildung 5.17: $\cosh x$ und $\sinh x$

Eigenschaften von Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

1.) Symmetrie: Der Sinus Hyperbolicus ist eine ungerade Funktion, denn es gilt: $\sinh(-x) = -\sinh x$.
Der Cosinus Hyperbolicus ist eine gerade Funktion, denn es gilt: $\cosh(-x) = \cosh x$.
(Siehe Definition 44.

2.) Zusammenhang der beiden Funktionen:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1\end{aligned}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Da $u = \cosh x$ und $v = \sinh x$ die Hyperbelgleichung $u^2 - v^2 = 1$ erfüllen, werden sie als "hyperbolische" Funktionen bezeichnet.

3.) Die Ableitung:

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\cdot(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\cdot(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x$$

5.7.2 Der Tangens Hyperbolicus und der Cotagens Hyperbolicus

Definition 61.

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{W} = (-1,1)$$

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{W} = \mathbb{R}\setminus[-1,1]$$

Laut Definition 44 sind der $\tanh x$ und der $\coth x$ ungerade Funktionen.