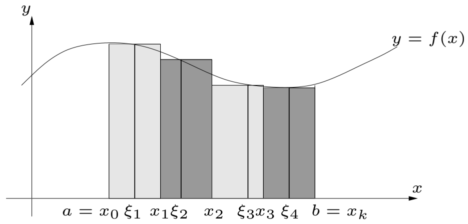

Abbildung 7.2:

Somit ergibt sich als Flächeninhalt der einzelnen Rechtecke:

$$A_n = f(\xi_n) \cdot \Delta x_n$$

Der gesuchte Flächeninhalt A unter der Kurve wird nun durch die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Teilrechtecke approximiert:

$$A \approx \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \cdot \Delta x_n$$

Definition 64. Die **Feinheit** $L(Z)$ der Zerlegung

$$Z \ : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

ist die maximale Intervalllänge

$$L(Z) = \max_n \ \Delta x_n \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

Der Flächeninhalt wird also angenähert durch die Summe der Inhalte der Teilrechtecke mit der Basis Δx_n und der Höhe $f(\xi_n)$. Als Näherungswert für A erhält man also:

$$R\,(f; Z; \xi_1, \ldots, \xi_N) := \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \cdot \Delta x_n \tag{7.1}$$

Diese Summe wird auch als RIEMANN'sche Summe für die Funktion $f(x)$, mit der Zerlegung Z und den Zwischenpunkten $\xi_1, \ldots \xi_N$, bezeichnet.

7.1.2 Möglichkeiten zur Zerlegung des Intervalls $[a, b]$

1) Die äquidistante Zerlegung: (s. Abb. 7.3)
Das Intervall $[a, b]$ wird in k gleich große Teilintervalle zerlegt. Für die Teilintervalllänge ergibt sich: $\Delta x_n = \frac{b-a}{k}$, womit gilt:

$$L\left(Z^{(k)}\right) = \frac{b-a}{k}$$

2) Die Zerlegung durch fortlaufende Halbierung: (s. Abb. 7.3)
Für die Teilintervalllänge ergibt sich:

$$L\left(Z^{(k)}\right) = \frac{b-a}{2^{k-1}} \qquad \begin{cases} k = 1: & \Delta x = b - a \\ k = 2: & \Delta x = \frac{b-a}{2} \\ k = 3: & \Delta x = \frac{b-a}{4} \\ & \vdots \\ & \Delta x = \frac{b-a}{2^{k-1}} \end{cases}$$