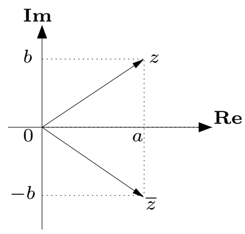

Abbildung 2.4: z und $\overline{z}$

Definition 4. Die Zahl $\overline{z} = a - bi$ heisst die zu z **konjugiert komplexe Zahl**. Es gilt

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \qquad \in \mathbb{R}$$

Die Zahl z und die zu z konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ liegen symmetrisch bezüglich der x-Achse (siehe Abb. 2.4).

Definition 5. Der **Betrag** von z : $\qquad |z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

2.3.7 Weitere Eigenschaften

1. $|\overline{z}| = |z|$
2. $z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2 \text{ Re } z$
3. $z - \overline{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi = 2i \text{ Im } z$
   Re $z = \frac{z+\overline{z}}{2}$
   Im $z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2.3.8 Die Polardarstellung

Eine komplexe Zahl $z = a + bi$ lässt sich auf zwei verschiedene Arten darstellen:

- durch Angabe der beiden Achsenabschnitte a und b
- durch Angabe des **Betrages** $r = |z|$ und des **Arguments** $\varphi = \arg z$ (des Winkels, den der Pfeil, der vom Ursprung zum Punkt z weist, mit der positiven x-Achse einschließt, siehe Abb. 2.5)

Der Winkel φ wird im Bogenmaß angegeben, wobei gilt: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

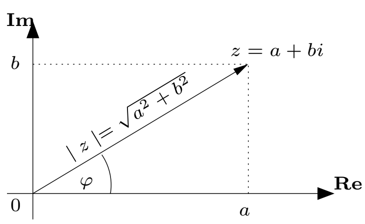

Abbildung 2.5:

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{r} \quad \Longrightarrow \quad b = r \cdot \sin\varphi \quad , \quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{r} \quad \Longrightarrow \quad a = r \cdot \cos\varphi$$

Polardarstellung von z

$$z = a + bi = r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \tag{2.10}$$