2.3.9 Multiplikation von komplexen Zahlen in Polardarstellung

Mit

$$z_1 = a + bi = r_1(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \qquad , \qquad z_2 = c + di = r_2(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)$$

berechnen wir jetzt das Produkt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2\big[(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)\big] \\ &= r_1 \cdot r_2\big[\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\big] \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2\big[(\cos(\varphi+\psi) + i\cdot\sin(\varphi+\psi)\big] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Die letzte Umformung erfolgt aufgrund der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen. Geometrisch bedeutet dies, dass bei der Produktbildung die **Beträge multipliziert**, die **Argumente addiert** werden (s. Abb. 2.6).

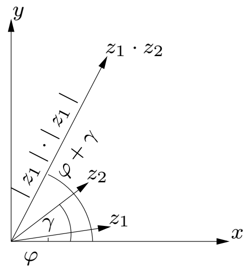

Abbildung 2.6:

2.3.10 Division von komplexen Zahlen in Polardarstellung

Die Division lässt sich auf die Multiplikation mit dem Reziprokwert zurückführen.

$$z_1 = a + bi = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ , \qquad z_2 = c + di = r_2(\cos\psi + i\sin\psi) \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i \qquad \text{lt. Formel (2.8)}$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}\cdot i \qquad \text{lt. Formel (2.9)}$$

$$c = \text{Re } z_2 = |z_2|\cos\psi = r_2\cos\psi \qquad , \qquad d = \text{Im } z_2 = |z_2|\sin\psi = r_2\sin\psi$$

$$|z_2|^2 = c^2 + d^2 = r_2^2$$

oben eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{r_2\cos\psi}{r_2^2} - \frac{r_2\sin\psi}{r_2^2}\cdot i = \frac{1}{r_2}\big[\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)\big] \\ &= \frac{1}{r_2}(\cos(\psi) - i\sin(\psi)) \ \ldots \ \text{Kehrwert von } z_2 \end{aligned}$$

letzeres wegen $\qquad \cos\alpha = \cos(-\alpha) \qquad -\sin\alpha = \sin(-\alpha)\,.$

$$\Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\frac{1}{r_2}[\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big[\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\big] \tag{2.12}$$

Daraus ergibt sich für die Division, dass die **Beträge dividiert** und die **Argumente subtrahiert** werden.