5.5.3 Arcustangens

Die Arcustangensfunktion $y = f(x) = \tan x$ mit

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

ist im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und besitzt somit eine Umkehrfunktion.

$$\overbrace{f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}}^{\text{Funktion: } \tan x} \qquad\qquad \overbrace{f^{-1} : \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}^{\text{Umkehrfunktion: } \arctan y}$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \tan x \qquad\qquad y = \tan x \longmapsto x = \arctan y$$

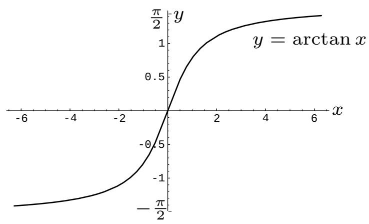

Abbildung 5.13:

Die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan y$:

$$(\arctan y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

5.5.4 Arcuscotangens

Die Cotangensfunktion $y = f(x) = \cot x$ mit $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ist im Intervall $(0, \pi)$ streng monoton fallend und besitzt somit eine Umkehrfunktion.

$$\overbrace{f : (0, \pi) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}}^{\text{Funktion: } \cot x} \qquad\qquad \overbrace{f^{-1} : \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad (0, \pi)}^{\text{Umkehrfunktion: } \operatorname{arccot} y}$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \cot x \qquad\qquad y = \cot x \longmapsto x = \operatorname{arccot} y$$

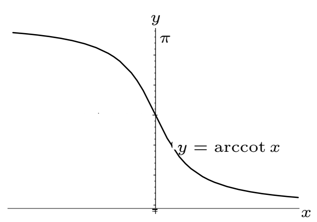

Abbildung 5.14:

Die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{arccot} y$:

$$(\operatorname{arccot} y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \cdots = -\frac{1}{1 + \cot^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}$$