Bemerkung 84. Für jeden Wert des Parameters t wird laut Formel (10.1) ein Punkt P mit den Koordinaten $(x(t), y(t))$ in der Ebene festgelegt.

Bemerkung 85. Da der Parameter t ein Intervall $[a, b]$ durchläuft, ergibt sich ein Durchlaufsinn bzw. eine Durchlaufrichtung und eine Durchlaufgeschwindigkeit.

Beispiel 182. Gegeben ist eine Ellipse durch die Gleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (siehe Abb. 10.2, links). Die Parameterdarstellung lautet:

$$x = a\cos t \qquad , \qquad y = b\sin t \qquad\qquad t \in [0, 2\pi)$$

denn dann gilt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

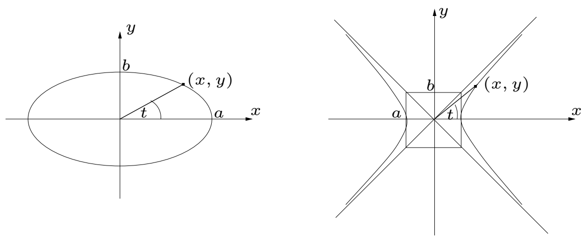

Abbildung 10.2:

Beispiel 183. Gegeben ist eine Hyperbel durch die Gleichung: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (siehe Abb. 10.2, rechts). Die Parameterdarstellung lautet:

$$x = a\cosh t \qquad , \qquad y = b\sinh t \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

es gilt dann nämlich

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

Bemerkung 86. (Ohne Beweis) Der Parameter t stellt den Flächeninhalt eines Hyperbelsektors (siehe Abb. 10.2, rechts) dar:

$$t = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} \quad \text{bzw.} \quad t = \operatorname{arsinh}\frac{y}{b}$$

Aus diesem Grund werden die Umkehrfunktionen zu den hyperbolischen Funktionen auch **Area–Funktionen** genannt.

Beispiel 184. Ein Kreis soll gleitfrei auf der x-Achse abgerollt werden. Betrachtet man einen bestimmten Punkt (x, y) auf dem Kreis, so beschreibt er während dieses Vorganges eine Kurve, die **Zykloide** genannt wird (s. Abb. 10.3). Wir betrachten z.B. den Fall, dass der Kreis um den Winkel $t = \pi + \varphi$ weitergerollt wurde:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a \cdot \sin\varphi & \Longrightarrow \quad & x = (\pi + \varphi)a + x_1 = (\pi + \varphi)a + a\sin\varphi \\
y_1 &= a \cdot \cos\varphi & \Longrightarrow \quad & y = a + a\cos\varphi = a(1 + \cos\varphi)
\end{aligned}$$

Mit $\pi + \varphi = t$ folgt :

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \cos(t - \pi) & \qquad \sin\varphi &= -\sin(\pi - t) \\
&= -\cos t & &= -\sin t
\end{aligned}$$

Für die Parameterdarstellung der Zykloide ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
x &= a \cdot (t - \sin t) \\
y &= a \cdot (1 - \cos t)
\end{aligned}$$