Satz 26. Der Satz von Rolle
Sei f stetig im Intervall $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Ferner gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert mindestens eine Stelle $c \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $f'(c) = 0$.

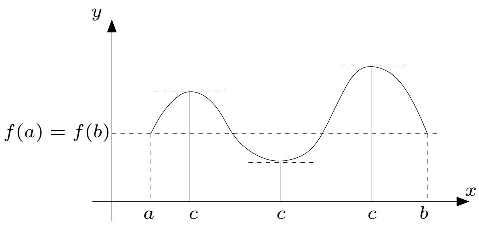

Abbildung 5.4: Zum Satz von Rolle

5.2.3 Der Mittelwertsatz

Satz 27. Der Mittelwertsatz (MWS)
Sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar im Intervall (a, b) dann existiert ein c in (a, b) mit:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{5.2}$$

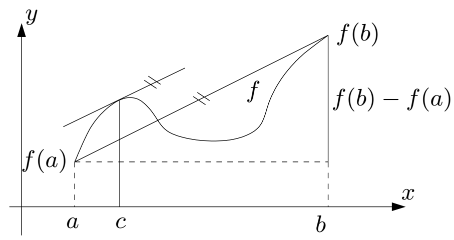

Abbildung 5.5: Zum Mittelwertsatz

Satz 28. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz
Seien die Funktionen f und g stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Ferner sei $g'(x) \neq 0$ im ganzen Intervall $[a, b]$, dann existiert eine Stelle $c \in (a, b)$ mit:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{5.3}$$

Bemerkung 47. Aus $g'(c) \neq 0$ folgt wegen des Mittelwertsatzes unmittelbar $g(b) - g(a) \neq 0$.

Folgerungen:

1. $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow f'(c) = 0 \overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0$
   Setze: $b = x$ $\qquad f(x) - f(a) = 0 \Longrightarrow f(x) = f(a) =: d$
   Es gilt also: $\quad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = d\ , \quad d \ldots$ konstant

2. $\big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x) = 0$
   Es gilt also: $\quad f'(x) = g'(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = g(x) + d\ , \quad d \ldots$ konstant