die Kurve $x = g(y)$ um die y-Achse rotiert, folgende Ausdrücke

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx \qquad , \qquad V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\ dy \tag{7.7}$$

Beispiel 141. Gesucht ist das Volumen des durch Rotation einer Ellipse um die x-Achse entstehenden Körpers (s. Abb. 7.21). Aus der Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ erhält man:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2(x)\ dx = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)\ dx = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$
$$= \pi \frac{b^2}{a^2}\left[a^3 - \frac{a^3}{3} - \left(a^2(-a) - \frac{-a^3}{3}\right)\right] = 4\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4ab^2\pi}{3}$$

Betrachten wir den **Spezialfall** $a = b$, so erhalten wir einen Kreis der um die x-Achse rotiert. Der entstehende Drehkörper stellt dann die Kugel dar. Ihr Volumen ist:

$$V_K = \frac{4a^3\pi}{3}$$

7.6.3 Die Oberfläche eines Drehkörpers

Gegeben sei eine Kurve $y = f(x)$, die um die x-Achse rotiert. Gesucht sei die Oberfläche des entstehenden Drehkörpers. Die Berechnung kann auf zwei Arten durchgeführt werden:

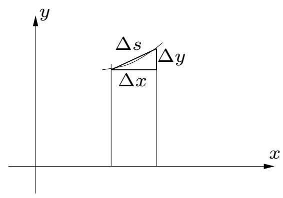

Abbildung 7.22:

1) Die Approximation durch Zylinderscheiben: Diese Approximation ist in den meisten Fällen sehr ungenau, speziell bei sehr steil ansteigenden bzw. steil abfallenden Kurven. Die Mantelfläche dieser einzelnen Zylinderscheiben ergibt sich jeweils durch: $M_{Zylinder} = 2\pi r h$.

$$R(f, Z) = 2\pi \sum_{i=1}^{N_k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

2) Die Approximation durch die entsprechenden Kurvensehnen: (s. Abb. 7.22)

Hier gilt: $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta s^2 = \Delta x^2 \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta s = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x$

Die Mantelfläche der einzelnen Kegelstümpfe ergibt sich durch:

$$M = 2\pi \cdot f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$