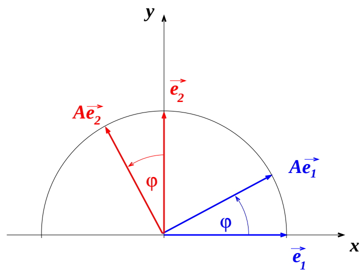
Spezialfall.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \tag{3.12}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix}$$



Geometrisch bedeutet dies eine Drehung um den Winkel φ in mathematisch positiver Richtung.

Bemerkung 31. Man nennt eine Matrix A von der Form (3.12) eine **Drehmatrix**.

3.8.2 Das Koordinatensystem

Wiederholung. Jedes System von n-linear unabhängigen Vektoren $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ im Raum $\mathbb{R}^n$ wird als **Basis** bezeichnet. Eine **Orthonormalbasis (ONB)** liegt vor, wenn für die Basisvektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ folgendes gilt:

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

Somit gilt für die Basisvektoren einer ONB:

- Sie stehen **paarweise orthogonal** aufeinander.
- Sie sind **normiert**, d.h. sie haben die Länge 1.

Beispiel 45. Standardbasis: $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$

$$\text{mit} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition 37. Ein **Koordinatensystem** in $\mathbb{R}^n$ wird durch eine Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ angegeben.

Beispiel 46.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots$ normiert und orthogonal $\qquad$ $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \ldots$ nicht normiert und nicht orthogonal

Siehe Abb. 3.7.

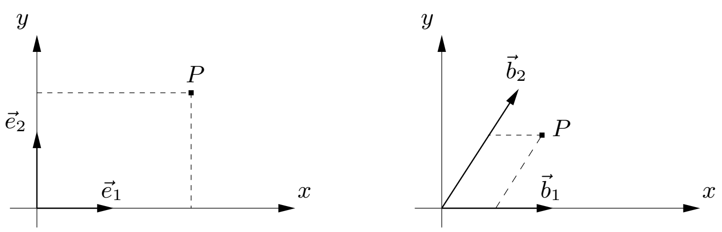


Abbildung 3.7: