T ist orthogonal und es liegt eine Drehspiegelung vor, da $\det T = -1$.
Geometrische Interpretation

$$\vec{x} = T^T \cdot \vec{x}\,' \qquad , \qquad \vec{x}\,' = \left(T^T\right)^{-1} \cdot \vec{x} = \left(T^{-1}\right)^T \cdot \vec{x} = \left(T^T\right)^T \cdot \vec{x} = T \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}\,'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}\,'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

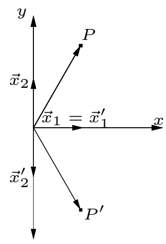

Abbildung 3.12: Drehspiegelung

3.10 Eigenwertprobleme

3.10.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Problem: In vielen Anwendungen ist es notwendig, zu einer quadratischen Matrix $A \in M(n \times n)$ einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zufinden, sodass die Vektoren $A \cdot \vec{v}$ und $\vec{v}$ parallel sind, d.h. man sucht einen Vektor $\vec{v}$ und eine Zahl λ so, dass $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt.

Definition 40. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** (**EW**) von $A \in M(n \times n)$ mit dem zugehörigen **Eigenvektor** (**EV**) $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$, falls gilt

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \tag{3.20}$$

D.h. auch wenn die Matrix nur reelle Elemente besitzt, können komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren mit komplexen Komponenten auftreten.
Gleichung (3.20) kann nun auch in der Form

$$(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}$$

geschrieben werden. Dies stellt ein lineares homogenes Gleichungssystem von n Gleichungen für die n unbestimmten Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ des Vektors $\vec{v}$ dar. Es besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung (siehe Abschnitt 3.3), wenn $\text{rang}(A - \lambda I) < n$ ist, d.h. wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Satz 14. *Für $A \in M(n \times n)$ ist λ genau dann Eigenwert vn A, wenn*

$$p(\lambda) := det(A - \lambda I) = 0 \tag{3.21}$$

*Man nennt $p(\lambda)$ das **charakteristische Polynom**, die Gleichung (3.21) wird **charakteristische Gleichung** genannt.*