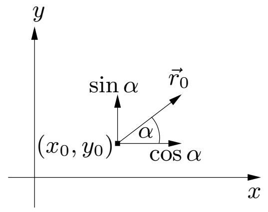

Abbildung 11.10:

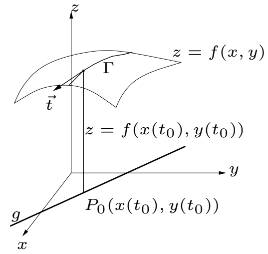

Abbildung 11.11:

Nun errichten wir eine zur z-Achse parallele Ebene E, die die Gerade g enthält, und bilden die Schnittkurve Γ von E mit der Fläche $z = f(x, y)$ (s. Abb. 11.11). Es gilt

$$\Gamma : \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f\big(x(t), y(t)\big) \end{pmatrix}$$

Der Tangentenvektor $\vec{t}$ an die Kurve Γ im Punkt $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ lautet nun

$$\vec{t} = \dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{x}\,(t) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}}_{\vec{t}_1} + \dot{y}\,(t) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}}_{\vec{t}_2}$$

D.h. der Tangentialvektor $\vec{t}$ ist eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren $\vec{t}_1$ und $\vec{t}_2$, die die Tangentialebene aufspannen (siehe (11.1) und (11.2)). Damit liegt $\vec{t}$ ebenfalls in der Tangentialebene.

b) Die Richtungsableitung

Die Raumkurve Γ besitzt nun die Parameterdarstellung

$$\Gamma : \ \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t\cos\alpha \\ y_0 + t\cos\beta \\ f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) \end{pmatrix}$$

Somit lautet der Tangentenvektor im Punkt P_0 (dem der Wert $t = 0$ des Parameters entspricht)

$$\begin{aligned} \vec{t} = \dot{\vec{y}}\,(t)|_{t=0} &= \left.\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ f_x\,(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\cos\alpha + f_y\,(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\cos\beta \end{pmatrix}\right|_{t=0} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ f_x\,(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y\,(x_0, y_0)\cos\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.5}$$

Wir interessieren uns nun im Punkt $P((x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ auf der Fläche $z = f(x, y)$ für die Änderung des Funktionswertes in Richtung des Vektors $\vec{r}_0$ (= Richtungsableitung). Diese Größe wird durch die 3. Komponente des Tangentenvektors $\vec{t}$ gemäß (11.5) an die Kurve Γ bestimmt (siehe Abb.11.12).

Definition 93. Sei $z = f(x, y)$ eine Fläche und $\vec{r}_0 = \binom{\cos\alpha}{\cos\beta}$ mit $|\vec{r}_0| = 1$ eine Richtung in der xy-Ebene, dann heißt

$$D_{\vec{r}_0} f\,(x_0, y_0) \equiv D_{\alpha,\beta} f\,(x_0, y_0) := f_x\,(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + f_y\,(x_0, y_0) \cdot \cos\beta \tag{11.6}$$

Richtungsableitung von f im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ in Richtung $\vec{r}_0$.