a) streng monoton steigend $\iff$ $f'(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} > 0 \quad \text{Nenner immer größer Null } \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\implies x^2-2x > 0 \iff x(x-2) > 0$$

$$\iff \underbrace{[(x>0)\ \wedge\ (x-2)>0]}_{\implies x>2} \quad \vee \quad \underbrace{[(x<0)\ \wedge\ (x-2)<0]}_{\implies x<0}$$

Die Funktion ist streng monoton steigend in den Intervallen $(-\infty, 0)\ \wedge\ (2, \infty)$.

b) streng monoton fallend $\iff$ $f'(x) < 0$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} < 0 \quad \text{Nenner immer größer Null } \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\implies x^2-2x < 0 \iff x(x-2) < 0$$

$$\iff \underbrace{[(x>0)\ \wedge\ (x-2)<0]}_{\implies 0<x<2} \quad \vee \quad \underbrace{[(x<0)\ \wedge\ (x-2)>0]}_{\implies \text{f.A.}}$$

Die Funktion ist streng monoton fallend im Intervall $(0, 2)\ \setminus \{1\}$.

7) Graph: Siehe Abb. 9.2.

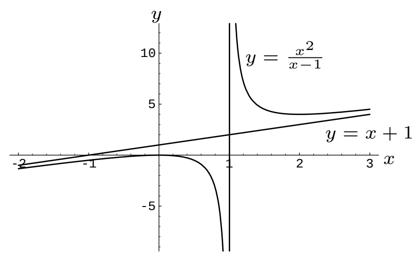

Abbildung 9.2:

Beispiel 162. $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

1) Definitionsbereich:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \text{da} \quad \begin{cases} (x-1) \ldots\ldots \text{erklärt für alle } x \in \mathbb{R} \\ \sqrt[3]{x^2} \ldots\ldots \text{erklärt für alle } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$(x-1)\sqrt[3]{x^2} = 0 \iff x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1 \implies N_1 = (0,0) \quad , \quad N_2 = (1,0)$$

3) Extrema: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt[3]{x^2} + (x-1)\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3x+2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\,\frac{5x^{\frac{1}{3}} - (5x-2)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \quad \begin{matrix} |\cdot 3x^{\frac{2}{3}} \\ |\cdot 3x^{\frac{2}{3}} \end{matrix}$$

$$f''(x) = \frac{15x-(5x-2)}{9x^{\frac{4}{3}}} = \frac{10x+2}{9x^{\frac{4}{3}}}$$

Achtung. Die Funktionen $f'(x)$ und $f''(x)$ sind in $x_0 = 0$ nicht definiert.