Um die weiteren Wurzelwerte zu erhalten setzen wir in (2.15) ein:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 1\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{0 + 2 \cdot 1\pi}{n} \right) = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \\
z_2 &= \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{0 + 2 \cdot 2\pi}{n} \right) = \cos \frac{4\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{n} \\
&\vdots \\
z_n &= z_0
\end{aligned}$$

Skizze speziell für n=6:

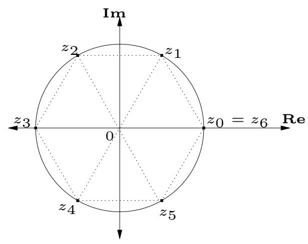

Abbildung 2.7:

2.3.13 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 2. *Für jedes Polynom*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

besitzt die Gleichung $P(x) = 0$ in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen. Dabei werden Mehrfachlösungen mit der entsprechenden Vielfachheit gezählt. Sind die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reell, so tritt mit jeder Lösung z auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ als Lösung auf.

Beispiel 7. Man berechne alle Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned}
&z^4 + z^2 + 1 = 0 \\
&\qquad \text{Setze:} \quad z^2 = u \\
&u^2 + u + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \\
&u_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\
&u = z^2 \qquad \ldots \text{Rücksubstitution} \\
&(z_1)^2 = u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
&\qquad |(z_1)^2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\
&\qquad \arg\left((z_1)^2\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3} \\
&z_{11} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&z_{12} = \sqrt{1}\left(\cos(\frac{\pi}{3} + \pi) + i \sin(\frac{\pi}{3} + \pi)\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$