Kapitel 5

Differentialrechnung

5.1 Das Tangentenproblem

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die stetig ist.
Gesucht ist die Gleichung der Tangente t an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Zuerst wird die Steigung einer beliebigen Sekante s_k ermittelt. Eine **Sekante** ist eine Gerade durch

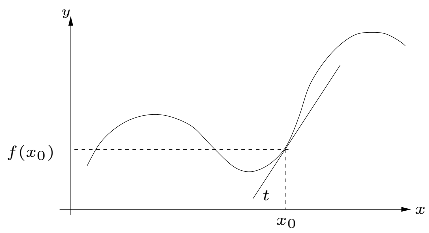

Abbildung 5.1: Tangente

den Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und einen weiteren beliebigen Kurvenpunkt $\big(x, f(x)\big)$ (siehe Abb. 5.2).
Die Steigung k_s der Sekante ist

$$k_s = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

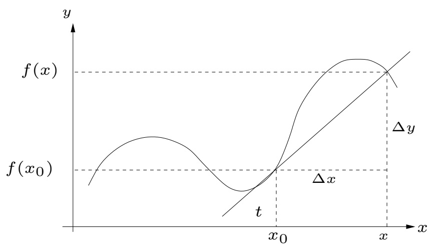

Abbildung 5.2: Sekante

Wandert nun der Kurvenpunkt $(x, f(x))$ beliebig nahe zum Punkt $(x_0, f(x_0))$, so nimmt s_k eine Grenzlage ein. Die Grenzlage der Sekante im Punkt $(x_0, f(x_0))$ wird als **Tangente** im Punkt $(x_0, f(x_0))$ bezeichnet.
Somit ergibt sich als Steigung k_t der Tangente im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$:

$$k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$