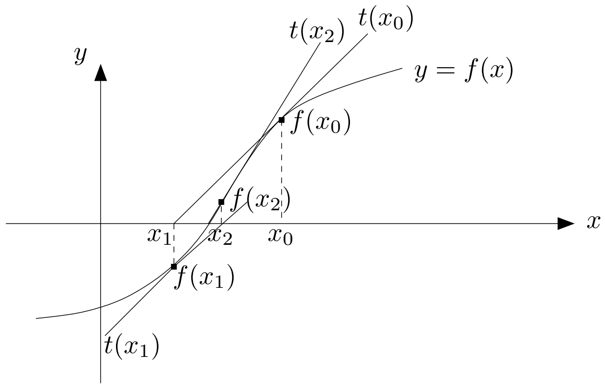

Abbildung 9.7:

Beispiel 163. Gesucht ist der Fixpunkt der Funktion $\varphi(x) = \cos x$.
Da laut Definition 78 die Relation $\varphi(x) - x = 0$ gelten muss, suchen wir die Nullstelle dieser Funktion. Dazu eignet sich das Näherungsverfahren nach NEWTON laut Formel (9.2).

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - x \\ f'(x) &= -\sin x - 1 \\ \Longrightarrow x_{n+1} &= x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} \end{aligned}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0,5	0,3776	-1,4794	-0,2552	0,7552
1	0,7552	-0,0271	-1,6855	0,0161	0,7391
2	0,7391	-0,0000	-1,6737	0,0000	0,7391

Man erkennt, dass die Nullstelle bereits ab dem zweiten Schritt auf 4 Dezimalstellen genau bestimmt ist. Somit liegt der Fixpunkt der Funktion $\varphi(x) = \cos x$ bei $x \approx 0{,}7391$.

Beispiel 164. Näherungsweise Bestimmung von $\sqrt{a}$ für $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - a = 0 \quad (x = \pm\sqrt{a}) \\ f'(x) &= 2x \\ \Longrightarrow x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad \ldots \qquad \text{allg. Formel zur Berechnung quadratischer Wurzeln!}$$

Berechnung speziell für $a = 3$: Wähle $x_0 = a = 3$ ("ist immer gut"):

n	x_n	$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$
1	3	2
2	2	1,75
3	1,75	1,732142
4	1,732142	1,732050
5	1,732050	1,732050

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{3} \approx 1,732050$$