Kapitel 10

Kurven in Ebene und Raum

10.1 Ebene Kurven

10.1.1 Die Parameterdarstellung

Beispiel 181. Die Kreislinie besitzt die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$. Bei dieser Form handelt es sich um eine Darstellung im kartesischen Koordinatensystem in impliziter Form[1]. Durch Auflösung der

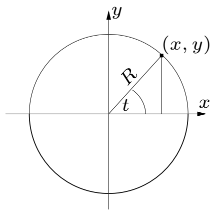

Abbildung 10.1:

Kreisgleichung nach y erhält man $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$
Es fällt hier auf, dass das Vorzeichen nicht eindeutig bestimmt ist. Laut Definition liegt somit keine eindeutige Zuordnung vor, und es kann daher nicht von einer Funktion gesprochen werden. Man erhält entweder den unteren oder den oberen Halbkreis (HK).

$$y = f_1(x) = +\sqrt{R^2 - x^2} \qquad \ldots\text{oberer HK} \quad , \qquad y = f_2(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \qquad \ldots\text{unterer HK}$$

Führen wir eine neue Variable t (= Parameter) so ein, dass die Variablen x und y von dieser neuen Variablen t abhängen, so erhalten wir die **Parameterdarstellung** der Kreislinie:

$$x = R\cos(t) \quad \big(= x(t)\big) \qquad , \qquad y = R\sin(t) \quad \big(= y(t)\big)$$

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t) = R^2 \underbrace{\big(\cos^2(t) + \sin^2(t)\big)}_{=1} = R^2$$

Um die gesamte Kreislinie zu durchlaufen muß $t \in [0, 2\pi)$ gelten.

Der allgemeine Fall der Parameterdarstellung

Die allgemeine Parameterdarstellung einer Kurve lautet:

$$x = x(t)\ , \quad y = y(t) \tag{10.1}$$

Die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ müssen stückweise stetig differenzierbar sein, wobei für den Parameter $t \in [a, b]$ gilt.

[1] d.h. sowohl x als auch y sind Teile eines Terms und liegen nicht in der Form $''x = \ldots''$ bzw. $''y = \ldots''$ vor.