13. Funktionen in einer Variablen

Definition. Seien X, Y Mengen. Eine **Funktion** $f : X \to Y$ ist eine Vorschrift, wo jedem Element der Menge X eindeutig ein Element von Y zugeordnet wird.

Wir betrachten hier Funktionen, die auf $\mathbb{R}$ bzw. einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert sind mit Werten in $\mathbb{R}$.

Schreibweise. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$

$\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ ist die **Definitionsmenge** (Definitionsbereich), und $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$ ist der **Wertebereich** (Bildbereich).

Bemerkung. Man schreibt oft $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und überlegt sich später, welche $x \in \mathbb{R}$ den Definitionsbereich bilden.

Bemerkung. Funktionen können angegeben werden durch

1. eine Tabelle
2. einen Funktionsgraphen
3. durch eine mathematische Vorschrift $x \mapsto y = f(x)$

Wir betrachten nun wichtige Funktionen und ihre Bildungsgesetze.

1. Konstante Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = c \qquad c \ldots$ konstant

Beispiel: $f(x) = 2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

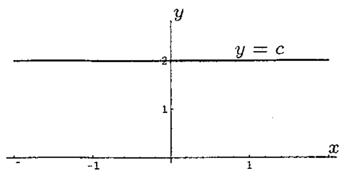
2. Lineare Funktionen

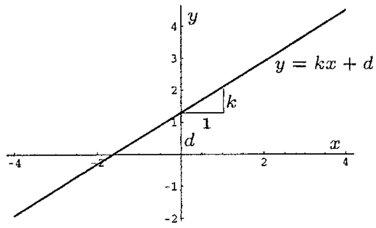
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = kx + d \qquad k, d \in \mathbb{R}$

Der Funktionsgraph ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, k ist die **Steigung** der

Geraden und d der **Ordinatenabschnitt**.

Ist $k > 0$ dann ist die Funktion monoton steigend, für $k < 0$ monoton fallend.





3. Parabel 2. Ordnung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = ax^2 \qquad a \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ ist eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

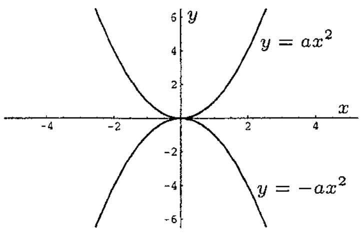
Für $a > 0$ ist f monoton steigend im Bereich $x > 0$, und monoton fallend im Bereich $x < 0$.

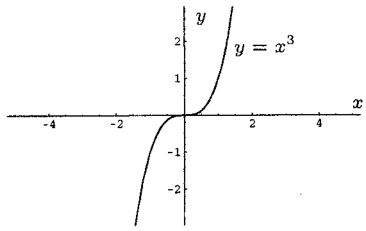
Für $a < 0$ ist f monoton steigend im Bereich $x < 0$, und monoton fallend im Bereich $x > 0$.

4. Parabel 3. Ordnung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = x^3$$

$f(x)$ ist eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ und monoton steigend.





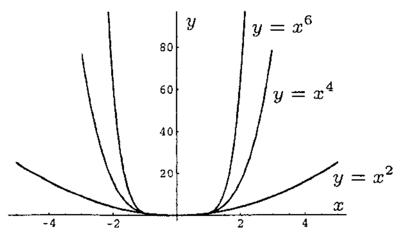
5. Parabel $n-$ter Ordnung

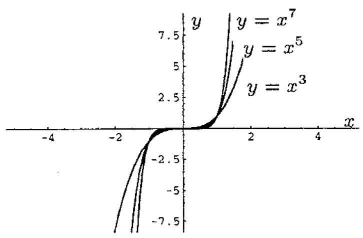
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = x^n \quad , \ n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 2$

Falls n **gerade**, gilt $f(x) \geq 0 \quad \forall \, x \in \mathbb{R}$.

Des weiteren ist $f(x)$ eine gerade Funktion, monoton steigend für $x > 0$ und monoton fallend für $x < 0$.

Wenn n **ungerade** ist, dann ist $f(x)$ eine ungerade monoton steigende Funktion.





6. Hyperbel 1. Ordnung

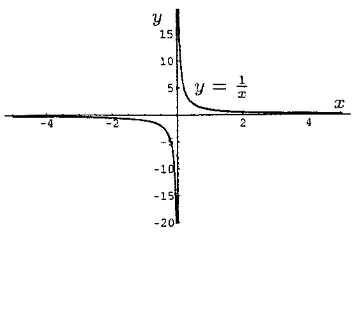
$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{x}$

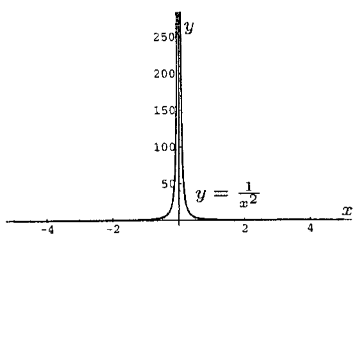
Die Hyperbel 1. Ordnung ist eine ungerade, monoton fallende Funktion.

7. Hyperbel 2. Ordnung

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{x^2}$

Sie ist eine gerade Funktion, monoton fallend für $x > 0$ und monoton steigend für $x < 0$.



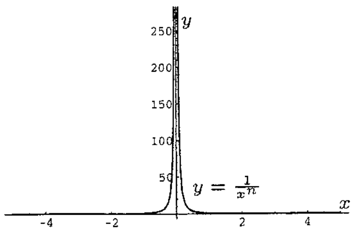


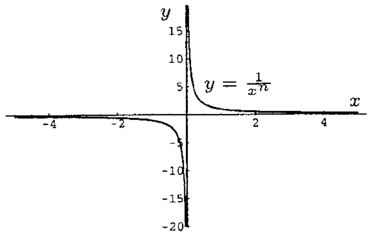
8. Hyperbel $n-$ter Ordnung

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{x^n} \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

Falls n **gerade** ist, liegt eine gerade Funktion vor, die monoton fallend ist für $x > 0$, und monoton steigend für $x < 0$.

Falls n **ungerade** ist, liegt eine ungerade, monoton fallende Funktion vor.





Definition.

1. Eine Funktion f heißt **gerade** (oder **symmetrisch**) wenn

$$f(-x) = f(x) \quad \forall \, x \in \mathbb{D}$$

2. Eine Funktion f heißt **ungerade** (oder **schiefsymmetrisch**) wenn

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall \, x \in \mathbb{D}$$

Bemerkung. Eine gerade Funktion ist symmetrisch bzgl. der $y-$Achse, eine ungerade Funktion ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.

Definition.

1. Eine Funktion f heißt in einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{D}$ **monoton steigend** (wachsend) wenn

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall \, x_1, x_2 \in [a, b]$$

2. Eine Funktion f heißt in einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{D}$ **monoton fallend** wenn

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall \, x_1, x_2 \in [a, b]$$

3. Gilt in den obigen Relationen an Stelle von "$\leq$" bzw. "$\geq$" sogar "$<$" bzw. "$>$" , dann spricht man von einer **streng monoton steigenden** bzw. **streng monoton fallenden** Funktion.

Beispiel. Eine konstante Funktion ist sowohl monoton steigend als auch monoton fallend.

$f(x) = x^2$ ist streng monoton fallend im Intervall $(-\infty, 0)$ und streng monoton steigend im Intervall $(0, \infty)$.

Für Funktionen können auch diverse punktweise Rechenoperationen definiert werden.

Seien $f_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{W}_1$, $f_2 : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{W}_2$.

a) Gleichheit

$$f_1 = f_2 \quad \text{auf} \quad \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2 \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) = f_2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2$$

b) Addition bzw. Subtraktion

$$f(x) = (f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2$$

c) Multiplikation

$$f(x) = (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2$$

d) Division

$$f(x) = (\tfrac{f_1}{f_2})(x) = \tfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad \forall\, x \in (\mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2) \setminus \{x \ : \ f_2(x) = 0\}$$

Des weiteren kann unter gewissen Voraussetzungen das **Zusammensetzen von Funktionen** (Komposition, Hintereinanderausführung) erklärt werden.

Seien $g : \mathbb{D}_g \to \mathbb{W}_g$ und $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ gegeben.

Gilt nun $\mathbb{W}_g \subseteq \mathbb{D}_f$, dann gilt für jedes $t \in \mathbb{D}_g$ dass $x = g(t) \in \mathbb{D}_f$ und folglich kann auf dieses Element die Funktion f angewandt werden.

Die **Komposition** $f \circ g : \mathbb{D}_g \to \mathbb{W}_f$ ist dann erklärt durch

$$y = (f \circ g)(t) = f(g(t))$$

Beispiel. Seien $x = g(t) = 4t - 3$ und $y = f(x) = 2x^2$ gegeben.

Dann ist $y = f(g(t)) = 2(4t-3)^2$.

Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Die Funktion

$$P(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

heißt **Polynomfunktion vom Grad** n . Es gilt $\mathbb{D}_P = \mathbb{R}$.

Speziell ist $P(x) = ax^2 + bx + c \quad , \; a \neq 0$ ein quadratisches Polynom.

Rationale Funktionen sind als Quotienten zweier Polynomfunktionen definiert.

$$R(x) = \tfrac{P(x)}{Q(x)} \quad , \; \mathbb{D}_R = \mathbb{R} \setminus \{x \ : \ Q(x) \neq 0\}$$

Man kann zeigen, dass es zu einer reellen Zahl $x \geq 0$ genau eine Zahl $y \geq 0$ gibt mit $y^2 = x$.

Dies führt zum Begriff der **Wurzelfunktion** $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$, wobei

$x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x}$. Offenbar gilt $(\sqrt{x})^2 = x$.

Bemerkung. Aus der Gleichung $y^2 = x$ folgt natürlich $y = \pm\sqrt{x}$.

Beispiel. Gegeben sei $f(x) = y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. Man bestimme die Definitionsmenge.

Es muss $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ sein. Zerlegung in Linearfaktoren liefert $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0$.

$x - 1 \geq 0$ und $x - 2 \geq 0$ liefert $x \geq 2$.

$x - 1 \leq 0$ und $x - 2 \leq 0$ liefert $x \leq 1$.

Damit ist $\mathbb{D}_f = \{x \ : \ (x \leq 1) \ \vee \ (x \geq 2)\} = \mathbb{R} \setminus (1, 2)$.