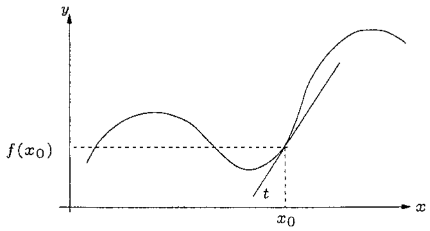
# 16. Differentialquotient, Mittelwertsatz

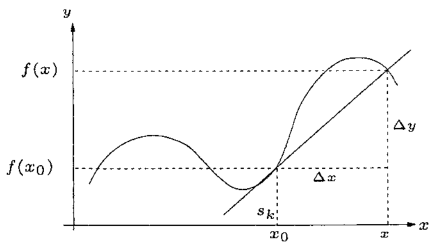
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ .

Wir suchen die Gleichung der **Tangente** $t$ an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ , $x_0 \in \mathbb{R}$ .




Das Problem dabei ist, dass vorderhand noch unklar ist, was unter der Tangente zu verstehen ist.

Wir betrachten daher zuerst die Steigung einer beliebigen **Sekante** $s$ durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ . Dies ist eine Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ und einen weiteren beliebigen Kurvenpunkt $(x, f(x))$ .




Die Steigung $k_s$ der Sekante ist $k_s = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ .

**Bemerkung.** Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ wird als **Differenzenquotient** bezeichnet.

Wandert nun der Kurvenpunkt $(x, f(x))$ beliebig nahe zum Punkt $(x_0, f(x_0))$ , so nimmt $s$ eine Grenzlage ein. Diese wird als **Tangente** im Punkt $(x_0, f(x_0))$ bezeichnet.

Somit ergibt sich als Steigung $k_t$ der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ :

$$k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Dies führt nun zum Begriff der Differenzierbarkeit.

**Definition.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0$ **differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert. Dieser wird als **Differentialquotient** oder **Ableitung** von $f$ in $x_0$ (bzw. an der Stelle $x_0$) bezeichnet.

**Schreibweisen.** Sei $y = f(x) = y(x)$ .

$$f'(x_0) \equiv y'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) \equiv \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$f'(x_0)$ stellt somit die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ dar.

**Bemerkung.** Setzen wir $x - x_0 = h \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + h$ , dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

**Bemerkung.** Existieren die einseitigen Grenzwerte

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{und} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

und sind diese gleich, so ist $f$ in $x_0$ differenzierbar.

**Satz.** $f$ in $x_0$ differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ stetig in $x_0$

(Die Umkehrung gilt i.a. nicht, wie die Betragsfunktion zeigt.)

**Definition.** Eine auf dem Intervall $(a, b)$ definierte Funktion $f$ heißt **auf dem Intervall** $(a, b)$ **differenzierbar**, wenn $f$ für alle $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist.

In diesem Fall ist die Ableitung wieder eine Funktion

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f'(x) = \tfrac{df}{dx}(x) = \tfrac{df(x)}{dx}$$

Ist dann $f'(x)$ eine stetige Funktion, dann heißt $f$ eine **glatte** Funktion, und der Graph eine **glatte** Kurve.

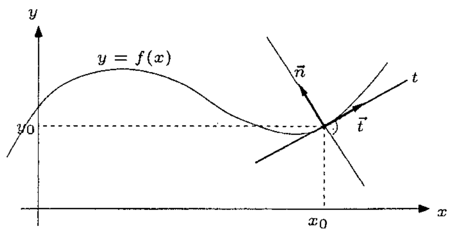
**Bemerkung.** Sei $f$ differenzierbar in $x_0$ .

Wie schon erwähnt, ist dann die Ableitung $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ , und die Gleichung der Tangente $t$ kann angegeben werden in der Form

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Da der Richtungsvektor der Tangente $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ ist, ergibt sich als Richtungsvektor für die Normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$ und folglich erhalten wir als Gleichung für die Normalgerade auf die Tangente

$$y - y_0 = \tfrac{1}{-f'(x_0)}(x - x_0)$$




**Beispiel.** Sei $f(x) = c$ die konstante Funktion. Dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \tfrac{c - c}{x - x_0} = 0 \ .$$

Als Ableitung erhalten wir also $f'(x) = 0$ .

**Beispiel.** Die Bewegungsgleichung für den freien Fall lautet $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ .

Um die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0$ zu ermitteln, muss $s'(t_0)$ berechnet werden.

$v(t_0) = s'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{\frac{g}{2}t^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{t-t_0} = \frac{g}{2} \lim\limits_{t \to t_0} \frac{t^2-t_0^2}{t-t_0} =$

$= \frac{g}{2} \lim\limits_{t \to t_0} \frac{(t-t_0)(t+t_0)}{t-t_0} = \frac{g}{2} \lim\limits_{t \to t_0} (t+t_0) = \frac{g}{2} \cdot 2t_0 = gt_0$

Als Geschwindigkeitsfunktion erhalten wir somit $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = gt$ .

**Beispiel.** Für die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ , $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$f'(x) = nx^{n-1}$ .

Im speziellen sind damit $(x^2)' = 2x$ und $(x^3)' = 3x^2$ .

**Satz.** (**Differentiationsregeln**)

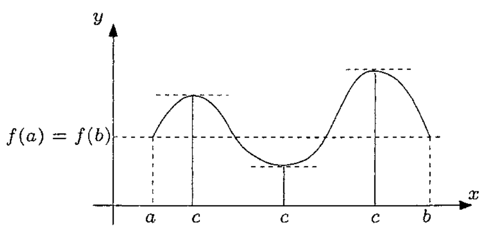
Seien $f$ und $g$ differenzierbare Funktionen mit Ableitungen $f'$ bzw. $g'$ gegeben. Dann gilt

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$ **Summenregel**
2. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ , $c \in \mathbb{R}$ **Konstantenregel**
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ **Produktregel**
4. $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ **Quotientenregel**

**Satz.** (**Satz von Rolle**)

Sei $f$ stetig im Intervall $[a, b]$ und differenzierbar in $(a, b)$ . Ferner gelte $f(a) = f(b)$ .

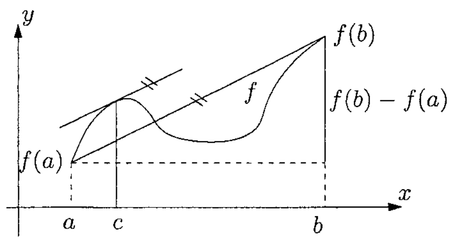
Dann existiert mindestens eine Stelle $c \in (a, b)$ mit der Eigenschaft $f'(c) = 0$ .



**Satz.** (**Mittelwertsatz (MWS)**)

Sei $f$ stetig im Intervall $[a,b]$ und differenzierbar in $(a,b)$ . Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$




**Folgerung.** Es gelte $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ .

Zu beliebigen $x^*, y^* \in (a,b)$ gibt es dann ein $c^* \in (a,b)$ mit

$0 = f'(c^*) = \frac{f(y^*)-f(x^*)}{y^*-x^*} \quad \Rightarrow \quad f(x^*) = f(y^*)$

Somit muss $f$ eine konstante Funktion sein, i.e. $f(x) = d$ in $(a,b)$ .

Ist $f'(x) = g'(x)$ in $(a,b)$ , dann gilt für $h(x) = f(x) - g(x)$ dass $h'(x) = 0$ .

Folglich ist $h$ eine konstante Funktion, i.e. $h(x) = d$ und es gilt $f(x) = g(x) + d$ . D.h. die beiden Funktionen unterscheiden sich nur in einer Konstanten.

**Satz.** (**Verallgemeinerter Mittelwertsatz**)

Seien die Funktionen $f, g$ stetig im Intervall $[a,b]$ und differenzierbar in $(a,b)$ . Ferner sei $g'(x) \neq 0$ im ganzen Intervall $[a,b]$ .

Dann existiert eine Stelle $c \in (a,b)$ mit

$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

**Satz.** (**Monotonieverhalten**) (siehe auch später)

Sei $f$ differenzierbar im Intervall $(a,b)$ und gelte $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ (bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$).

Dann ist $f$ streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) im Intervall $(a,b)$ .

**Beweis.** (für den Fall $f'(x) > 0$)

Seien $a < x_1 < x_2 < b$ . Nach dem MWS gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$ .

Also ist $f$ streng monoton steigend. $\square$