

# 19. Weitere elementare Funktionen

## 1. Der Arcussinus

Die Sinusfunktion  $y = f(x) = \sin x$  (mit  $y' = \cos x$ ) ist im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  streng monoton wachsend und somit existiert dort eine Umkehrfunktion.

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \sin x$$

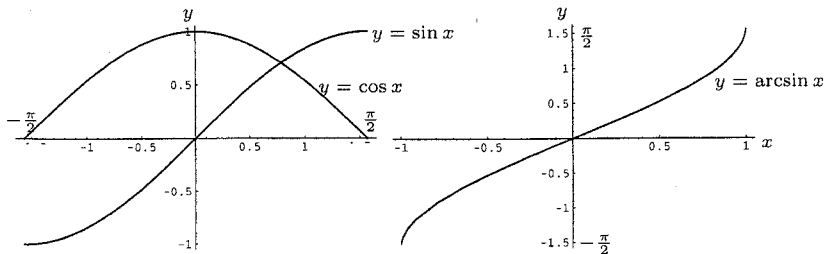
$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad , \quad y \mapsto x = \arcsin y$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(\arcsin y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x}$$

Wegen  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  für  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

gilt  $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ .



## 2. Der Arcuscosinus

Die Cosinusfunktion  $y = f(x) = \cos x$  (mit  $y' = -\sin x$ ) ist im Intervall  $[0, \pi]$  streng monoton fallend und somit existiert dort eine Umkehrfunktion.

$$f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \cos x$$

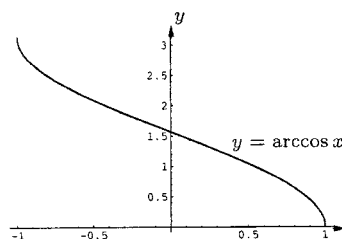
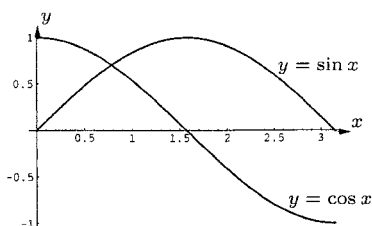
$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad , \quad y \mapsto x = \arccos y$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(\arccos y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\sin x}$$

Wegen  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  für  $x \in [0, \pi]$

gilt  $(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ .



### 3. Der Arcustangens

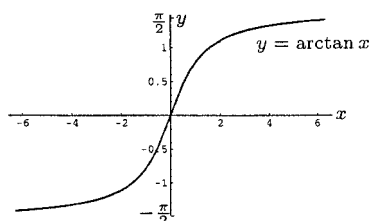
Die Tangensfunktion  $y = f(x) = \tan x$  (mit  $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ ) ist im Intervall  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  streng monoton wachsend und somit existiert dort eine Umkehrfunktion.

$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \tan x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad , \quad y \mapsto x = \arctan y$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(\arctan y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$



### 4. Der Arcuscotangens

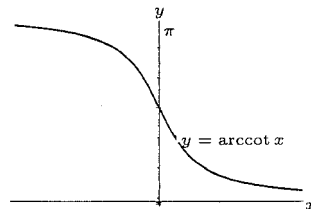
Die Cotangensfunktion  $y = f(x) = \cot x$  (mit  $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ) ist im Intervall  $(0, \pi)$  streng monoton fallend und somit existiert dort eine Umkehrfunktion.

$$f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = \cot x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi) \quad , \quad y \mapsto x = \operatorname{arccot} y$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$(\operatorname{arccot} y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \dots = -\frac{1}{1+\cot^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}$$



## 5. Potenzfunktion, Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

Bislang wurden folgende Arten von Potenzen von  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  definiert (manche davon gelten auch für beliebiges  $a \in \mathbb{R}$ ):

- $a^n = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$  ( $n$ -mal) ,  $n \in \mathbb{N}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}$  ,  $m \in \mathbb{N}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$  ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  ,  $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Dabei gelten für Exponenten  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$  und  $a > 0$  die folgenden **Rechenregeln**:

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta \quad , \quad a^{\alpha-\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} \quad , \quad a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha$$

Wir wollen nun auch den Ausdruck  $a^\alpha$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$  definieren, wobei wiederum  $a > 0$  ist.

Dazu betrachtet man irgendeine Folge  $q_n$  von rationalen Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \alpha$

(dies bedeutet: für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Index  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|\alpha - q_n| < \varepsilon$  für  $n \geq N_\varepsilon$ ), und setzt

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}$$

(Man kann zeigen, dass dies unabhängig von der Wahl der Folge ist, welche gegen  $\alpha$  strebt.)

**Satz.**

$$a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \quad \text{für } a > 1$$

$$a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta \quad \text{für } 0 < a < 1$$

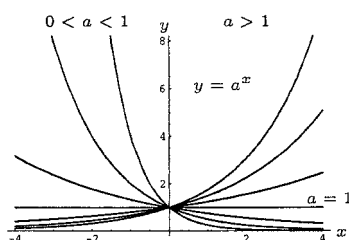
Die **Potenzfunktion**  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist definiert durch

$$x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Die **Exponentialfunktion**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist definiert durch

$$x \mapsto a^x, \quad a > 0$$

Sie ist streng monoton steigend für  $a > 1$ , eine konstante Funktion für  $a = 1$ , und streng monoton fallend für  $0 < a < 1$ .



Weil die Exponentialfunktion streng monoton und stetig ist auf dem gesamten Definitionsbereich  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ , existiert für sie die Umkehrfunktion.

**Definition.** Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist der **Logarithmus**

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y$$

**Rechenregeln.** Mit der Schreibweise  $\log_a y \equiv \log y$  gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\log a = 1 \quad , \quad \log 1 = 0$$

$$\log(y_1 y_2) = \log y_1 + \log y_2$$

$$\log \frac{y_1}{y_2} = \log y_1 - \log y_2$$

$$\log y^z = z \log y$$

**Bemerkung.** Einige Werte von  $a$  haben eine besondere Bedeutung, und dafür existiert auch eine eigene Schreibweise:

$$a = 10 \quad \log_{10} y = \lg y \quad \dots \text{dekadischer Logarithmus}$$

$$a = e \quad \log_e y = \ln y \quad \dots \text{natürlicher Logarithmus}$$

$$a = 2 \quad \log_2 y = \text{ld } y \quad \dots \text{dualer Logarithmus}$$

Dabei ist die **Euler'sche Zahl**  $e$  definiert als Grenzwert

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,71828 \dots$$

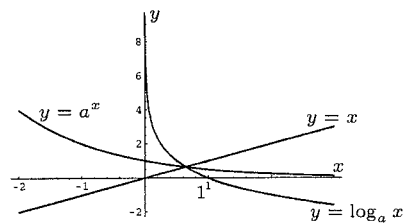
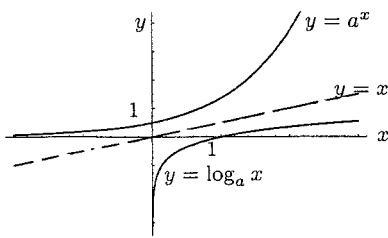
**Eigenschaften der Logarithmusfunktion.**  $(y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y)$

$$1. \text{ Für } a > 1 \text{ gilt: } \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

$$2. \text{ Für } 0 < a < 1 \text{ gilt: } \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$$



Wollen wir zwischen verschiedenen Logarithmen-Basen umrechnen, ergibt sich für  $x_1 = \log_a y$  und  $x_2 = \log_b y$  :

$$y = a^{x_1} = b^{x_2} \Rightarrow \log_a a^{x_1} = \log_a b^{x_2} \Rightarrow x_1 \log_a a = x_2 \log_a b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \log_a b \Rightarrow \log_a y = \log_b y \cdot \log_a b \Rightarrow \log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$$

Speziell also etwa  $\log_b y = \frac{\ln y}{\ln b}$  .

Für die **Ableitung der Logarithmusfunktion** (Herleitung siehe Skriptum) ergibt sich

$$y(x) = \log_a x \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

**Speziell** also  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Damit können wir nun auch die **Ableitung der Exponentialfunktion** bestimmen.

$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$

$$(a^y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{d(a^y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{x \ln a} = x \ln a = a^y \ln a$$

**Speziell** erhalten wir  $(e^y)' = e^y$  .

Für die **Ableitung der Potenzfunktion**  $y = f(x) = x^\alpha$  erhielten wir im Falle  $\alpha \in \mathbb{Q}$  die Aussage

$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1} .$$

Für ein beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist zunächst eine Umformung notwendig.

$$y = x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x} \Rightarrow$$

$$y'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

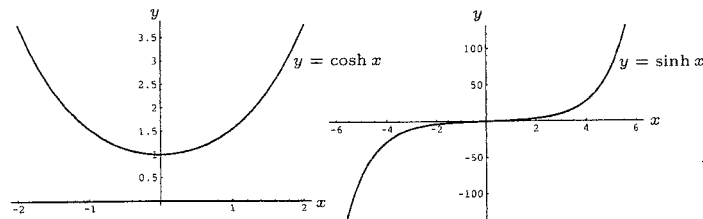
**Beispiel.**  $y = f(x) = x^x = e^{x \ln x}$

$$y' = e^{x \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x)$$

## 6. Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

Diese Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$



1) Wegen  $\sinh(-x) = -\sinh x$ , ist der Sinus Hyperbolicus eine ungerade Funktion.

Wegen  $\cosh(-x) = \cosh x$ , ist der Cosinus Hyperbolicus eine gerade Funktion.

$$\begin{aligned} 2) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \\ &= \frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] = 1 \end{aligned}$$

Da  $u = \cosh x$  und  $v = \sinh x$  die Hyperbelgleichung  $u^2 - v^2 = 1$  erfüllen, werden sie auch als "hyperbolische" Funktionen bezeichnet.

3) (Ableitungen)

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

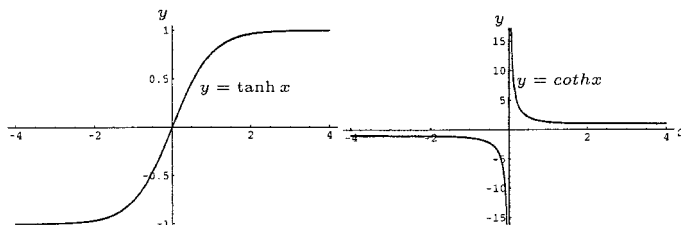
$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

## 7. Tangens Hyperbolicus und Cotangens Hyperbolicus

Diese Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W} = (-1, 1)$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad , \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$



Beide Funktionen sind ungerade, und ihre Ableitungen sind

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

## 8. Die Area-Funktionen

Dies sind die Umkehrfunktionen zu den hyperbolischen Funktionen. Wir müssen dabei allerdings auf Definitions- und Wertebereich achten.

### a) Areasinus Hyperbolicus

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto y = \sinh x$$

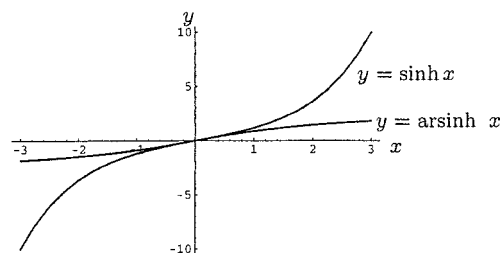
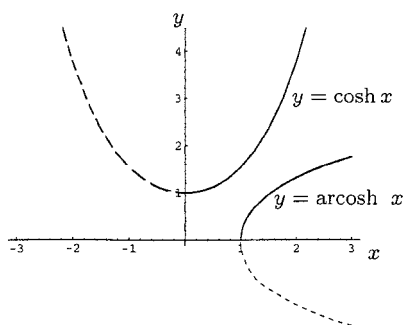
$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad y \mapsto x = \operatorname{arsinh} y$$

### b) Areacosinus Hyperbolicus

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [1, \infty) \quad , \quad x \mapsto y = \cosh x$$

$$f^{-1} : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad y \mapsto x = \operatorname{arcosh} y$$





### c) Areatangens Hyperbolicus

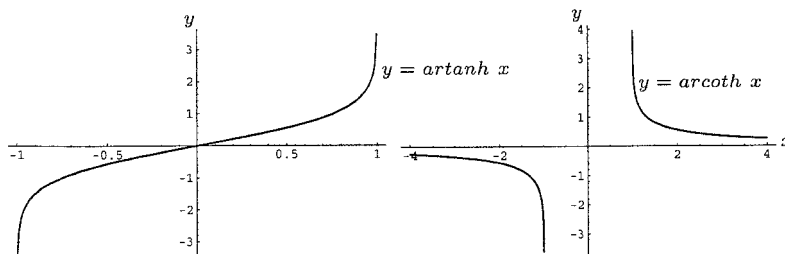
$$f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1) \quad , \quad x \mapsto y = \tanh x$$

$$f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad y \mapsto x = \operatorname{artanh} y$$

### d) Areacotangens Hyperbolicus

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \quad , \quad x \mapsto y = \coth x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad , \quad y \mapsto x = \operatorname{arcoth} y$$



**Bemerkung.** Die Area-Funktionen können auch mittels der Logarithmusfunktion dargestellt werden.

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1 \quad \text{bzw.} \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für  $e^x$ , folglich

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} .$$

Weil stets  $e^x > 0$  und  $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$  ist, erhalten wir

- $x = \operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}. \text{ Damit}$$

- $x = \operatorname{arcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$

(Das negative Vorzeichen liefert den unteren Zweig der Funktion)

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ liefert}$$

- $x = \operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$ , für  $|y| < 1$  (damit  $\frac{1+y}{1-y} > 0$ )

$$y = \operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ liefert}$$

- $x = \operatorname{arcoth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}$ , für  $|y| > 1$  (damit  $\frac{y+1}{y-1} > 0$ )

Für die **Ableitungen der Area-Funktionen** erhalten wir

a)  $y = \operatorname{arsinh} x \leftrightarrow x = \sinh y$

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

(Beachte dass  $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$  und  $\cosh y \geq 0$ )

b)  $y = \operatorname{arcosh} x \leftrightarrow x = \cosh y$

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(Beachte dass für  $y \in \mathbb{R}_0^+$  stets gilt  $\sinh y \geq 0$ )

c)  $y = \operatorname{artanh} x \leftrightarrow x = \tanh y$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\tanh y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \cosh^2 y = \frac{\cosh^2 y}{1} = \\ &= \frac{\cosh^2 y}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \mathbb{D} = (-1, 1) \end{aligned}$$

d)  $y = \operatorname{arcoth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{coth} y$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\operatorname{coth} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = -\sinh^2 y = \frac{-\sinh^2 y}{1} = \\ &= \frac{-\sinh^2 y}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \operatorname{coth}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2} \quad , \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]\end{aligned}$$

## 9. Höhere Ableitungen

**Definition.** Die Ableitung von  $f'$  bezeichnen wir, falls sie existiert, mit  $f''$  und schreiben

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

Die weiteren **höheren Ableitungen** werden mit

$$f''', f^{(IV)}, \dots, f^{(n)} \quad \text{bezeichnet.}$$

**Beispiel.** Für  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  erhalten wir

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad , \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \quad \dots$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k} = k! \binom{n}{k} x^{n-k} \quad \text{für } k \leq n$$

$$f^{(k)}(x) = 0 \quad \text{für } k > n$$

**Beispiel.** Für  $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$  erhalten wir

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f''(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{x}$$

$$f'''(x) = \frac{15}{8}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{15}{8\sqrt{x}} \quad \text{ist für } x = 0 \text{ **nicht** definiert.}$$

**Beispiel. (Harmonischer Oszillator)**

Die Auslenkung  $s(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ergibt sich zu

$$s(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad , \quad A, \omega, \alpha \in \mathbb{R}$$

Für die Geschwindigkeit  $v(t)$  ergibt sich

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = -A\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

Für die Beschleunigung  $b(t)$  ergibt sich

$$b(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

Beachte, dass  $b(t) = -\omega^2 s(t)$ . Die rücktreibende Kraft  $mb(t)$  ist also proportional zur Auslenkung  $s(t)$  (Hook'sches Gesetz).