22. Uneigentliche Integrale

Bislang wissen wir, dass $\int_a^b f(x)dx$ existiert, wenn f stückweise stetig auf dem Intervall $[a,b]$ ist.

Es ist nun auch von Interesse, Integrale zu betrachten, wo f an einem der Eckpunkte unstetig ist bzw. wo der Integrationsbereich ein unbeschränktes Intervall ist.

Beispiel. Gesucht ist die Fläche zwischen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und der $x-$Achse im Intervall $[0,1]$.

Wir beobachten, dass $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert ist und dort eine Polstelle hat.

Formale Rechnung liefert

$$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x}dx = \ln x \,|_0^1 = 0 - (-\infty) = \infty$$

Betrachten wir hingegen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, liegt ebenfalls eine Polstelle an $x_0 = 0$ vor, jedoch ergibt formale Rechnung einen endlichen Wert.

$$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\,|_0^1 = 2$$

Definition. $\int_a^b f(x)dx$ heißt **uneigentliches Integral 1. Art** wenn f an einer der beiden Integrationsgrenzen unstetig ist (und sonst stetig).

• Befindet sich die Unstetigkeitsstelle am linken Randpunkt, definieren wir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad \text{(falls Grenzwert existiert)}$$

• Befindet sich die Unstetigkeitsstelle am rechten Randpunkt, definieren wir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad \text{(falls Grenzwert existiert)}$$

Beispiel. Betrachte $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}dx$.

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \Big|_\varepsilon^1 = \tfrac{3}{2} \lim_{\varepsilon\to 0^+}(1-\varepsilon^{\frac{2}{3}}) = \tfrac{3}{2}$$

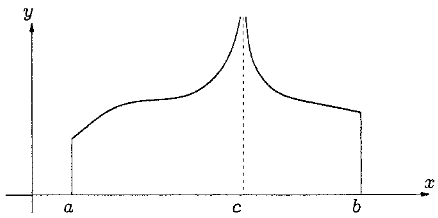
Das uneigentliche Integral existiert also (d.h. ergibt einen endlichen Wert).

- Befindet sich die Unstetigkeitsstelle an der Stelle $c \in (a,b)$ und ist f sonst überall stetig, definieren wir

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0^+} \int_{c+\eta}^b f(x)dx$$

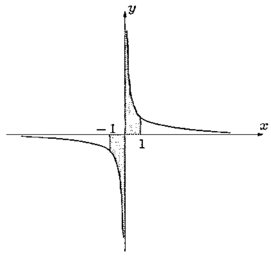
Beide Grenzwerte müssen unabhängig voneinander existieren.



Bei der Bestimmung des **Cauchy'schen Hauptwertes** hingegen wird der Grenzübergang nicht getrennt, sondern gekoppelt durchgeführt.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \Big)$$

Beispiel. Betrachte $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$



Es ist $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}dx = -\infty$ und $\lim\limits_{\eta\to 0^+} \int\limits_{\eta}^{1} \frac{1}{x}dx = \infty$.

Getrennte Bildung der Grenzwerte würde den unbestimmten Ausdruck $-\infty + \infty$ liefern.

Bei der Bestimmung des Cauchy'schen Hauptwertes ergibt sich

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}dx\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = 0$$

Der Cauchy'sche Hauptwert existiert also.

Definition. Ein **uneigentliches Integral 2. Art** ist das Integral einer stetigen Funktion f über ein unbeschränktes Intervall.

- $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ ... falls Grenzwert existiert!
- $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to -\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ ... falls Grenzwert existiert!
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$ ... falls beide Grenzwerte existieren!

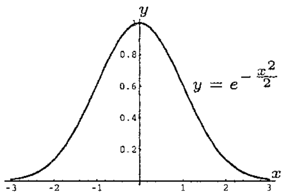
Beispiel. Betrachte $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$I = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} (\arctan x \,|_0^b) = \lim_{b\to\infty} (\arctan b - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Es ergibt sich weiters

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Beispiel. Betrachte $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

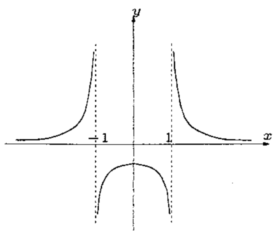


Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, daher existiert eine Stammfunktion $\phi(x) = \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Sie ist allerdings nicht durch elementare Funktionen darstellbar. Ein wichtiges Ergebnis ist (siehe Mathematik 2)

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Definition. Ist das Integrationsintervall unbeschränkt und liegt im Inneren des Integrationsintervalles zusätzlich noch eine Polstelle von f vor, spricht man von einem **uneigentlichen Integral der 3. Art** .

Beispiel. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$



Ein derartiges Integral wird in eine Summe von uneigentlichen Integralen 1. und 2. Art zerlegt.

Die Funktion $f(x)$ sei in $x_0 = a$ nicht stetig. Weiters sei $a_1 < a < b_1$. Dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a_1} f(x)dx + \int\limits_{a_1}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{\infty} f(x)dx$$

Dieses Integral existiert nur, wenn alle Teilintegrale existieren (d.h. endlich sind).

Für $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ stellt sich heraus, dass es **nicht** existiert.