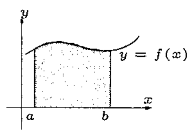
23. Anwendungen der Integralrechnung

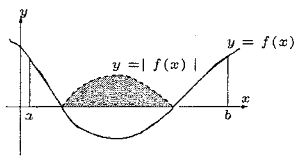
1) Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der $x-$Achse

Sei $y = f(x)$.

Ist $f(x) \geq 0$ für $a \leq x \leq b$, dann ist $A = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Im allgemeinen Fall ist $A = \int\limits_a^b |f(x)|dx$.





Man bestimmt zuerst die Nullstellen der Funktion und summiert dann die Absolutbeträge der einzelnen Integrale, die sich über die Teilintervalle von $[a, b]$ zwischen den Nullstellen erstrecken.

Beispiel. Betrachte die Kurve $y = f(x) = \sin x$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

Die Nullstellen sind an den Stellen $0, \pi$ und 2π .

$$A = \int\limits_0^{2\pi} |\sin x|dx = |\int\limits_0^{\pi} \sin x dx| + |\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x dx| =$$

$$= | -\cos x\,|_0^{\pi}\,| + | -\cos x\,|_{\pi}^{2\pi}\,| = | -(-1-1)| + | -(1-(-1))| = 4$$

Eine weitere Möglichkeit wäre $A = 2\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$.

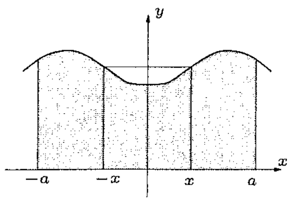
Bemerkung. Liegt ein symmetrisches Integrationsintervall $[-a, a]$ vor, dann gilt

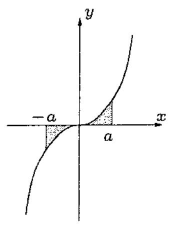
- Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$, dann

  $$A = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

- Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$, dann

  $$A = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$





2) Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

Definition. Ein Bereich

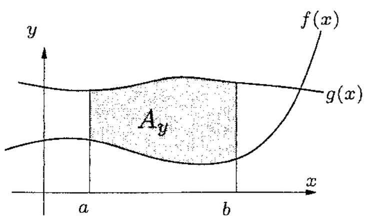
$$\{(x,y)\ :\ a \le x \le b \ \text{ und } \ f(x) \le y \le g(x)\}$$

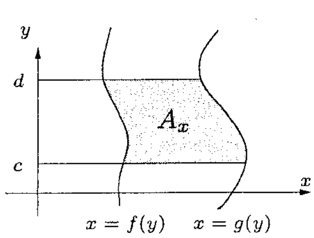
heißt **Normalbereich bzgl. der $y-$Richtung**.

Definition. Ein Bereich

$$\{(x,y)\ :\ c \le y \le d \ \text{ und } \ f(y) \le x \le g(y)\}$$

heißt **Normalbereich bzgl. der $x-$Richtung**.

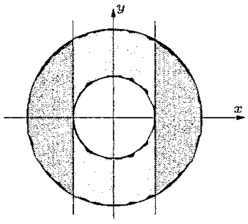




Es gilt:

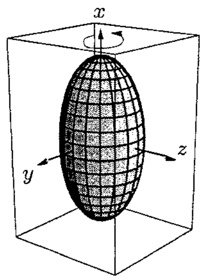
$$A_y = \int_{a}^{b} (g(x) - f(x))dx \quad , \quad A_x = \int_{c}^{d} (g(y) - f(y))dy$$

Bemerkung. Ist der Bereich kein Normalbereich, kann er oft in eine Vereinigung von Normalbereichen zerlegt werden, wie etwa beim Kreisring.



3) Volumen eines Drehkörpers

Wir betrachten die Rotation einer Kurve $y = f(x)$ um die $x-$Achse bzw. um die $y-$Achse.



Sei Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit Zwischenwerten ξ_i . Die Rechtecke mit Länge Δx_i und Höhe $f(\xi_i)$ rotieren um die $x-$Achse und das Volumen der so entstandenen Scheibe ist $V_i = \pi \cdot (f(\xi_i))^2 \cdot \Delta x_i$.

Die Volumina dieser Scheiben werden aufsummiert und wir erhalten eine Approximation des gesuchten Volumens.

Als nächstes werden ausgezeichnete Zerlegungsfolgen (Z_i) betrachtet mit $L(Z_i) \to 0$.

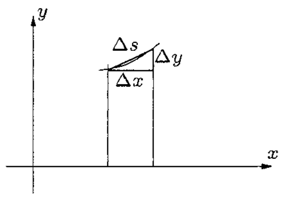
Durch Grenzübergang erhalten wir schließlich folgende Ausdrücke, wenn die Kurve $y = f(x)$ um die $x-$Achse bzw. die Kurve $x = g(y)$ um die $y-$Achse rotiert

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad , \quad V_y = \pi \int_c^d g^2(y)dy$$

4) Oberfläche eines Drehkörpers

Die Kurve $y = f(x)$ möge um die $x-$Achse rotieren. Wir suchen die Oberfläche des entstehenden Drehkörpers.

Dabei verwenden wir eine Approximation durch die entsprechenden Kurvensehnen.



Hier gilt

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x^2 (1 + \tfrac{\Delta y^2}{\Delta x^2}) \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \sqrt{1 + \tfrac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x$$

Bei einer Zerlegung Z mit Zwischenpunkten ξ_i ergibt sich als Mantelfläche eines Kegelstumpfes

$$M_i = 2\pi \cdot f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + \tfrac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \cdot \Delta x$$

Diese Mantelflächen werden aufsummiert und wir erhalten eine Approximation der gesuchten Oberfläche.

Durch ausgezeichnete Zerlegungsfolgen und Grenzübergang ergibt sich schließlich bei Rotation von $y = f(x)$ um die $x-$Achse die Oberfläche

$$O_x = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Bei Rotation von $x = \varphi(y)$ um die $y-$Achse erhalten wir als Oberfläche

$$O_y = 2\pi \int\limits_a^b \varphi(y) \cdot \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy$$

5) Numerische Integration

Es kommt vor, dass es nicht möglich ist, eine Stammfunktion von $f(x)$

zu bestimmen, um $\int\limits_a^b f(x)dx$ zu bestimmen. Daher wurden verschiedene Näherungsverfahren entwickelt, die ohne Ermittlung einer Stammfunktion auskommen.

- Bei der **Rechtecksregel** verwendet man eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$ mit Zwischenpunkten x_i . Weiters soll f stetig differenzierbar sein. Wir erhalten dabei die Riemannsche Summe

$$R_N(f, Z) = \tfrac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Eine Fehlerabschätzung ergibt

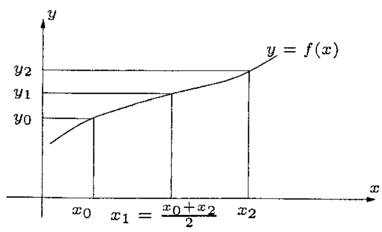
$$|R_N(f, Z) - \int\limits_a^b f(x)dx| \leq \text{const} \cdot \tfrac{1}{N}$$

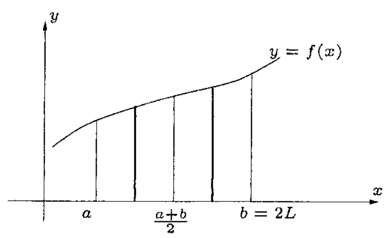
Man bezeichnet die Rechtecksregel auch als **Verfahren 1. Ordnung**, da der Fehler indirekt proportional zu N ist.

- Ausgangspunkt für die **Simpson'sche Regel** ist die sogenannte Kepler'sche Fassformel, bei der das Intervall $[a, b]$ in nur zwei Teilintervalle zerlegt wird,

$$Z: \quad a = x_0 < x_1 = \tfrac{a+b}{2} < x_2 = b$$

$$A = \tfrac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$





Bei Berechnung nach der Simpsons'schen Regel wird das Intervall $[a, b]$ in $2L$ äquidistante Teilintervalle zerlegt. Auf jedes dieser Teilintervalle wird die Kepler'sche Fassregel angewendet. Eine Voraussetzung dabei ist, dass die Funktion f dreimal stetig differenzierbar ist.

$$A_L = \tfrac{b-a}{6L} \cdot (y_0 + y_{2L} + 4y_1 + 4y_3 + \ldots + 4y_{2L-1} + 2y_2 + 2y_4 + \ldots + 2y_{2L-2})$$

Der Fehler ergibt sich aus

$$|A_L - \int\limits_a^b f(x)dx| \leq \mathrm{const}(f) \cdot \tfrac{1}{L^4} \quad \text{mit}$$

$$\mathrm{const}(f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(IV)}(x)| \tfrac{(b-a)^5}{2880}$$

Bemerkung. Für Polynome dritten Grades ergibt sich somit bereits eine **exakte** Bestimmung des Flächeninhaltes.