# 30. Interpolation - Lagrange Polynome

**Problemstellung**:

Gegeben seien $n+1$ Wertepaare (z.B. Messwerte) $(x_i, y_i)$ $i = 0, 1, \ldots, n$ , wobei $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ .

Gesucht ist eine stetige Funktion $f$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ .

Die $x-$Werte der Wertepaare heißen auch **Stützstellen**, die $y-$Werte auch **Stützwerte** und die Wertepaare selbst **Stützpunkte**.

Eine stetige Funktion $f$ mit der Eigenschaft $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ heißt **Interpolierende** der Wertepaare $(x_i, y_i)$ . Man sagt auch $f$ **interpoliert** die Wertepaare.

Es scheint plausibel, dass es zu vorgegebenen Wertepaaren mehrere Interpolierende geben wird. In diesem Abschnitt diskutieren wir interpolierende **Polynome**.

**Einfachster Fall.** Gegeben seien zwei Wertepaare $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ mit $x_0 \neq x_1$ .

Wir bilden folgendes Polynom 1. Grades

$$P(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$$

Für $x = x_0$ gilt: $P(x_0) = y_0$

Für $x = x_1$ gilt: $P(x_1) = y_1$

Damit erfüllt $P(x)$ die geforderte Eigenschaft.

**Beispiel.** Gegeben seien die Wertepaare $(1, 3)$ und $(2, 5)$ .

Dann ist $P(x) = \frac{x-2}{-1} \cdot 3 + \frac{x-1}{1} \cdot 5 = 2x + 1$ .

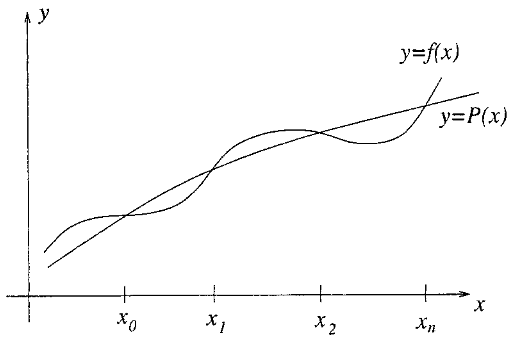
Man beachte, dass $Q(x) = x^2 - x + 3$ ebenfalls ein interpolierendes

Polynom ist.

Im allgemeinen Fall liegen $n+1$ Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ vor $(x_i \neq x_j$ für $i \neq j)$ und wir suchen ein Polynom $P_n(x)$ $n-$ten Grades mit

$$P_n(x_i) = y_i \quad , \forall\ i$$

Dabei können die Stützpunkte auch von einer Funktion $f(x)$ stammen, d.h. es gilt $y_i = f(x_i) \quad , \forall\ i$ .




Wir bilden nun die Faktoren

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \quad , \ k = 0, \ldots, n$$

Offenbar gilt $L_{n,k}(x_k) = 1$ und $L_{n,k}(x_i) = 0$ wenn $i \neq k$ .

**Definition.** Das **Lagrange'sche Interpolationspolynom** $P_n(x)$ vom Grad $n$ ist gegeben durch

$$P_n(x) = y_0 L_{n,0}(x) + y_1 L_{n,1}(x) + \ldots + y_n L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x)$$

**Bemerkung.** $P_n(x)$ ist das einzige Polynom vom Grad $\leq n$ welches die Eigenschaft $P_n(x_i) = y_i \quad , \forall\ i$ besitzt.

**Bemerkung.** Gesucht ist das Interpolationspolynom zweiten Grades von $f(x) = \frac{1}{x}$ , das an den Stellen $x_0 = 2$ , $x_1 = 2.5$ und $x_2 = 4$ mit $f$ übereinstimmt.

Wir betrachten also die Stützpunkte

$(2, 0.5)$ , $(2.5, 0.4)$ , $(4, 0.25)$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{1}{3}((-4x+24)x - 32)$$

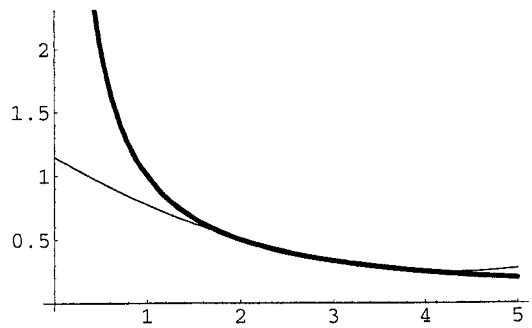
$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{1}{3}((x-4.5)x + 5)$$

Damit erhalten wir

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k L_{2,k}(x) =$$

$$= 0.5 \cdot [(x-6.5)x + 10] + \frac{0.4}{3} \cdot [(-4x+24)x - 32] + \frac{0.25}{3} \cdot [(x-4.5)x + 5] =$$

$$= (0.05x - 0.425)x + 1.15$$




Wir können jetzt etwa $f(3) = \frac{1}{3}$ durch $P_2(3) = 0.325$ approximieren.