Mathematik 1 **WS 2019/20**

1. Übungsblatt – Gruppe A

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für 1 Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\text{(a)}\quad \frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5\,,\qquad \frac{x+\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}-\frac{x+\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}=0\,,\ a,b\in\mathbb{R},\text{fest}$$

$$\text{(b)}\quad 3x-\frac{3x-10}{9-2x}=2+\frac{6x^2-40}{2x-1}\,,\qquad x^4-13x^2+36=0$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt{x^2-2x+1}+x-1=0\,,\qquad 8^x=4$$

$$\text{(d)}\quad \ln x=2\,,\quad \ln x=-1\,,\quad \ln x=1/3\,,\quad \ln x=0\,,\quad \log_x 8=3\,,\quad \log_x 25=2$$

$$\text{(e)}\quad 2x-9<5x-1\,,\quad (3x+1)(x-2)+x^2>12+(2x-1)^2\,,\quad \frac{5x+4}{8}-\frac{x-2}{12}>0$$

$$\text{(f)}\quad \frac{1}{x+3}\le\frac{1}{4}\,,\qquad \frac{3x}{5+x}<-3$$

$$\text{(g)}\quad x^2+x-2<0\,,\qquad \frac{x-4}{x-9}<0$$

Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

$$(2x-5<7)\ \wedge\ (-3x-1\le -7)$$

3. Für $z_1=3+2i$ und $z_2=-3+2i$ berechne man

$$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1\cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 3 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(5,5,9)$ und $P_2(-1,-1,-3)$ auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegen.

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$ schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(0,4,3)$ bzw. $Q(4,-6,4)$ auf der Ebene E_1 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(3,2,3)$, $B(2,0,-1)$ und $C(2,1,-4)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E:\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$.

11. Man zeige, dass die Gerade

    (a) $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E:\ x + 2y + z = 1$ liegt,

    (b) $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ zu E parallel ist und

    (c) $g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit E den Schnittpunkt $S(0,0,1)$ hat.

12. Man ermittle die im Abstand $d = 2$ zur Ebene $E:\ 2x - y + 2z = 2$ liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

die Hesse'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$x - y + 2z = 3$ und $x + y + z = 1$.

15. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

16. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes $P(3, 2, -2)$ von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(5, -3, 1)$, $B(3, 3, 2)$, $D(-1, -2, 3)$, $E(4, -2, 7)$.

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im $\mathbb{R}^2$ alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die orthogonal sind zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

Mathematik 1 WS 2019/20

1. Übungsblatt – Gruppe B

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für (1) Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

   $$\text{(a)}\ \frac{8x+7}{9x^2-4} = \frac{16}{15x-10}\,, \quad \frac{a}{a-2x} - \frac{b}{b-2x} = 0\,,\ a, b \in \mathbb{R}, \text{fest}$$

   $$\text{(b)}\ \frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}\,, \quad (x^2+10)(x^2+4)+5 = 0$$

   $$\text{(c)}\ \sqrt{2x^2+3} + x = 0\,, \quad 3^x = \frac{1}{27}$$

   $$\text{(d)}\ \ln x = 1\,, \quad \ln x = -2\,, \quad \ln x = -1/2\,, \quad \ln x = 0\,, \quad \log_x 243 = 5\,, \quad \log_x 4 = 1/2\,,$$

   $$\text{(e)}\ 3x - 13 < 4x - 7\,, \quad 4(x-1) - (x-1)(x+1) > 5 - (x-2)^2\,, \quad \frac{x}{7} - 9 < \frac{8-x}{5}$$

   $$\text{(f)}\ \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{5}\,, \quad \frac{4x-3}{x} \leq 3$$

   $$\text{(g)}\ x^2 + 4x + 3 \leq 0\,, \quad \frac{x-2}{x+3} \geq 0$$

   Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

   $$(2x - 5 < 9)\ \wedge\ (3x + 1 \geq 10)$$

3. Für $z_1 = 4 + 3i$ und $z_2 = 5 - 4i$ berechne man

   $$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 3 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(1,-1,2)$ und $P_2(4,-1,5)$ auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen.

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(1,3,-6)$ bzw. $Q(5,-5,4)$ auf der Ebene $E_2:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$ liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(-1,3,-2)$, $B(1,2,1)$ und $C(2,-1,-1)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E:\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$.

11. Man zeige, dass die Gerade

    (a) $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E:\ x + 2y + z = 1$ liegt,

    (b) $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ zu E parallel ist und

    (c) $g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit E den Schnittpunkt $S(0,0,1)$ hat.

12. Man ermittle die im Abstand $d = 1$ zur Ebene $E:\ \ 2x - 2y + 2z = 3$ liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$x + 2y - z = 1$ und $2x + y + z = 2$.

15. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

16. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes $P(4, 0, 2)$ von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(0, 0, 0)$, $B(2, 2, 2)$, $D(-2, 2, 3)$, $E(0, 1, 7)$.

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im $\mathbb{R}^2$ alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die orthogonal sind zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

Mathematik 1 — WS 2019/20

1. Übungsblatt – Gruppe C

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für (**1**) Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

   (a) $\dfrac{24-5x}{6-2x} - 5 = \dfrac{34-14x}{9-3x}\,, \quad \dfrac{2a+x}{2a-x} = \dfrac{a+b}{a-b}\,,\ a,b \in \mathbb{R}, \text{fest}$

   (b) $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{5}{2-3x} = \dfrac{4}{2x-1}\,, \quad (x^2-5)^2 + (x^2-1)^2 = 40$

   (c) $\sqrt{2x^2-1} + x = 0\,, \quad 5^x = 0.04$

   (d) $\ln x = -1\,, \quad \ln x = 3\,, \quad \ln x = 1/4\,, \quad \ln x = 0\,, \quad \log_x 1024 = 10\,, \quad \log_x 27 = 3$

   (e) $3x+3 < 9x+5\,, \quad (3-x)^2 > (x-2)(x+8)+1\,, \quad \dfrac{3x-2}{6} - \dfrac{x+8}{9} < 0$

   (f) $\dfrac{1}{x-4} < \dfrac{1}{2}\,, \quad \dfrac{2x}{4-x} < -2$

   (g) $x^2 - x - 2 > 0\,, \quad \dfrac{x+2}{x-5} > 0$

   Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

   $$(3x+12 > -9)\ \wedge\ (-2x+9 \geq -10)$$

3. Für $z_1 = 1+2i$ und $z_2 = 3+5i$ berechne man

   $$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 3 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(5,5,9)$ und $P_2(-1,-1,-3)$ auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegen.

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(0,4,3)$ bzw. $Q(4,-6,4)$ auf der Ebene $E_2:\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6$ liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(3,2,3)$, $B(2,0,-1)$ und $C(2,1,-4)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E:\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$.

11. Man zeige, dass die Gerade

    (a) $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E:\ x + 2y + z = 1$ liegt,

    (b) $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ zu E parallel ist und

    (c) $g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit E den Schnittpunkt $S(0,0,1)$ hat.

12. Man ermittle die im Abstand $d = 2$ zur Ebene $E:\ x - 2y + 2z = 1$ liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$x - y + z = 1$ und $x + y - z = 2$.

15. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für
$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

16. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes $P(1, 2, 3)$ von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $D(-1, 2, 1)$, $E(2, 2, 5)$.

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im $\mathbb{R}^2$ alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die orthogonal sind zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

Mathematik 1 WS 2019/20

1. Übungsblatt – Gruppe D

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für (1) Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\text{(a)}\quad \frac{8x+7}{4x^2-9} = \frac{12}{10x-15}\,, \qquad \frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}} - \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}} = 0\,,\ a, b \in \mathbb{R}, \text{fest}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3-2x} = \frac{3}{3x-1}\,, \qquad 10x^4 - 21 = x^2$$

$$\text{(c)}\quad x - \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1} = 0\,, \qquad 2^x = \frac{1}{8}$$

$$\text{(d)}\quad \ln x = 1\,, \quad \ln x = -3\,, \quad \ln x = 1/2\,, \quad \ln x = 0\,, \quad \log_x 8 = -3\,, \quad \log_x 25 = -2$$

$$\text{(e)}\quad 5x-1 > 31x+95\,, \quad 16(2-x)^2+(3x-2)^2 < (15-5x)^2\,, \quad 3x-11 < \frac{13-2x}{5}+7$$

$$\text{(f)}\quad \frac{2}{3-x} \leq \frac{5}{8}\,, \qquad \frac{x}{3+x} < 1$$

$$\text{(g)}\quad x^2+x-6 \geq 0\,, \qquad \frac{5x+1}{3-2x} \geq 0$$

   Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

$$(2x-5<9)\ \wedge\ (3x+1 \geq 10)$$

3. Für $z_1 = -2+3i$ und $z_2 = -1+i$ berechne man

$$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 3 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(3,0,5)$ und $P_2(-1,1,3)$ auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen.

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden
$g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(1,3,-6)$ bzw. $Q(5,-5,4)$ auf der Ebene
$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(2,0,0)$, $B(-1,2,0)$ und $C(1,1,3)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden
$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
zur Ebene $E:\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$.

11. Man zeige, dass die Gerade

    (a) $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E:\ x - y + 2z = 11$ liegt,

    (b) $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu E parallel ist und

    (c) $g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit E den Schnittpunkt $S(7,6,5)$ hat.

12. Man ermittle die im Abstand $d = 2$ zur Ebene $E:\ x - 2y + 3z = 4$ liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die Hesse'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$x - y + 2z = 3$ und $x + y + z = 1$.

15. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

16. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes $P(3, 2, -2)$ von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $D(1, 3, 0)$, $E(2, 2, 4)$.

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im $\mathbb{R}^2$ alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die orthogonal sind zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

Mathematik 1 WS 2019/20

1. Übungsblatt – Gruppe GEO

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für 1 Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\text{(a)}\ \frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}\,,\quad \frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}\,,\ a,b,c\in\mathbb{R},\text{fest}$$

$$\text{(b)}\ \frac{8-x}{2}-\frac{2x-11}{x-3}=\frac{x-2}{6}\,,\quad (x^2-10)(x^2-3)=78$$

$$\text{(c)}\ \sqrt{4x^2}-x+2=0\,,\quad 10^x=0.0001$$

$$\text{(d)}\ \ln x=1\,,\quad \ln x=-2\,,\quad \ln x=-1/3\,,\quad \ln x=0\,,\quad \log_x 512=-3\,,\quad \log_x 125=-3$$

$$\text{(e)}\ 3x+3<9x+5\,,\quad (3-x)^2>(x-2)(x+8)+1\,,\quad \frac{3x-2}{6}-\frac{x+8}{9}<0$$

$$\text{(f)}\ \frac{1}{x-4}<\frac{1}{2}\,,\quad \frac{2x}{4-x}<-2$$

$$\text{(g)}\ x^2-x-2>0\,,\quad \frac{x+2}{x-5}>0$$

   Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

$$(5x+4>14)\ \wedge\ (3x-9<5)$$

3. Für $z_1=-2+3i$ und $z_2=-1+i$ berechne man

$$|z_1|,\ |z_2|,\ z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen z_1 und z_2 von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt $z_1\cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für z_1 und z_2 wie in Beispiel 3 berechne man z_1^4 und alle dritten Wurzeln aus z_2. Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P_1(-11, 11, -14)$ und $P_2(1, 5, 15)$ auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ liegen.

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte $P(0, 4, 3)$ bzw. $Q(4, -6, 4)$ auf der Ebene E_1 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(1, 2, 3)$, $B(4, 2, 0)$ und $C(3, 1, 1)$ in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E: 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$.

11. Man zeige, dass die Gerade

    (a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E: x - y + 2z = 11$ liegt,

    (b) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu E parallel ist und

    (c) $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit E den Schnittpunkt $S(7, 6, 5)$ hat.

12. Man ermittle die im Abstand $d = 2$ zur Ebene $E: x - 2y + 3z = 4$ liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \; \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die Hesse'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen
$2x - y - z = 2$ und $x + 2y + 2z = 3$.

15. Man berechne $|\vec{u} \times \vec{v}|$ und $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$ für
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

16. Man berechne $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ mit den Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes $P(1, 2, 3)$ von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $D(-1, 2, 1)$, $E(2, 2, 5)$.

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$ dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im $\mathbb{R}^2$ alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, die orthogonal sind zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.