Mathematik 1 WS 2019/20

2. Übungsblatt – Gruppe A

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je ②

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & 5 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysstems ②

$$A \cdot x = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ②

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 4 \\ 2x - 2y + 4z &= 2 \\ 2x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? ①

$$\begin{aligned} -x \phantom{{}+5y} - 5z + 6w &= 0 \\ 2x + 5y \phantom{{}-5z} + 8w &= 0 \\ x + 2y + z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je ②

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 &= 9 \end{aligned}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **2**

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& 3y &+& 2z &+& w &=& 4 \\ 2x &+& 2y &+& z &+& w &=& 3 \\ 3x &+& y &-& z &-& 2w &=& -1 \end{array}$$

34. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das folgende System lösbar ist und gebe in diesem Fall die Lösung an. **2**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &+& z &=& a^2 \\ x &+& y &+& 3z &=& a \\ 3x &+& 4y &+& 7z &=& 8 \end{array}$$

35. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen **1**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne **1**

$$A - B^T, \;\; B^T \cdot B, \;\; A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Für A und B jeweils **1**, für C **2**

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

39. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen regulär? je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für A und B jeweils **1**, für C **2**

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems **1**

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System **1**

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & - & z & = & 19 \\ 4x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & a \end{array}$$

eine Lösung mit $x = 3$ besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit **1**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\,\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = 120°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1}? **1**

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse **2**

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\varphi & -\cos\varphi & -\sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi & \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Für A **1**, für B und C jeweils **2**

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für A **1**, für B und C jeweils **2**

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{je } \mathbf{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{je } \mathbf{3}$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck $T^t A\, T$ eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei **2**

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mathematik 1 WS 2019/20

2. Übungsblatt – Gruppe B

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen — je 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen — je 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & 10 & 5 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysstems — 2

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems — 2

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? — 1

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je **2**

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **2**

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 3z & + & 2w & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & w & = & 3 \\ -2x & + & 3y & + & z & - & w & = & -1 \end{array}$$

34. Gegeben ist das Gleichungssystem **2**

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0\,, \\ -2\lambda x_1 + \lambda x_2 + 9x_3 &= 6\,, \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren beliebig viele Lösungen?

(c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen?

(d) Man berechne die Lösung für $\lambda = 1$.

(e) Man berechne die Lösung zu b).

(f) Wie können die Ergebnisse von a), b) und c) geometrisch gedeutet werden?

35. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen **1**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne **1**

$$A - B^T\,, \quad B^T \cdot B\,, \quad A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Für A und B jeweils **1**, für C **2**

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen — je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

39. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix — je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & 2 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 2 & 2 & a-2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen regulär? — je **2**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Für A und B jeweils **1**, für C **2**

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems ①

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 5 \\ x & + & 3y & = & -1 \end{array}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System ①

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 3y & - & 2z & = & 31 \\ 2x & + & 6y & + & 3z & = & 4 \\ 4x & + & 2y & - & z & = & a \end{array}$$

eine Lösung mit $z = -6$ besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit ①

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = -30°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1}? ①

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse ②

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Für A **1**, für B und C jeweils **2**

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Für A **1**, für B und C jeweils **2**

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{je } \mathbf{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{je } \mathbf{3}$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck $T^t A T$ eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei **2**

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mathematik 1 WS 2019/20

2. Übungsblatt – Gruppe C

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -5 & 10 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysstems 2

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems 2

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? 1

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je 2

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 9 \end{array}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **(2)**

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & - & 2w & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & w & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 4 \end{array}$$

34. Für welche Werte von α und $\beta \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit **(2)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \end{pmatrix}$$

lösbar, eindeutig lösbar bzw. nicht lösbar?

35. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen **(1)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne **(1)**

$$A - B^T\,, \;\; B^T \cdot B\,, \;\; A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Für A und B jeweils **(1)**, für C **(2)**

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je **(2)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

39. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 3 & 1+a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen regulär? je **2**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Für A und B jeweils **1**, für C **2**

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems **1**

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System **1**

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ ax + 2y - 3z &= -4 \end{aligned}$$

eine Lösung mit $x = 1$ besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit **1**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\,\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = 45°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1}? **1**

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse **2**

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Für A **1**, für B und C jeweils **2**

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für A **1**, für B und C jeweils **2**

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{je } \mathbf{2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{je } \mathbf{3}$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck $T^t A\,T$ eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei **2**

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mathematik 1 WS 2019/20

2. Übungsblatt – Gruppe D

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je (1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & 5 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysstems (2)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (2)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & - & 2z & = & 8 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? (1)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \end{array}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je (2)

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & w & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ & - & 3y & + & z & & & = & -2 \\ -3x & + & 3y & + & z & - & 3w & = & -5 \end{array}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **2**

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & 2w & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & + & 3w & = & 4 \\ -x & - & 2y & + & 3z & + & w & = & -1 \end{array}$$

34. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System **2**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & + & (a^2-10)z & = & a \end{array}$$

(a) keine Lösung,

(b) eine eindeutig bestimmte Lösung,

(c) beliebig viele Lösungen besitzt.

35. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen **1**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne **1**

$$A - B^T, \ B^T \cdot B, \ A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Für die Matrix C und ihre Inverse C^{-1} gebe man eine geometrische Interpretation der durch sie vermittelten Transformation an. (Hinweis: Man betrachte die Bilder der kanonischen Basisvektoren)
Für A und B jeweils **1**, für C **2**

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

39. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix je ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen regulär? je ②

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für A und B jeweils ①, für C ②

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je ②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems ①

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System ①

$$\begin{aligned} 5x - 3y - 2z &= 31 \\ 2x + 6y + 3z &= 4 \\ 4x + 2y - z &= a \end{aligned}$$

eine Lösung mit $z = -6$ besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit 1

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = -90°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1}? 1

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse 2

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Für A 1, für B und C jeweils 2

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für A 1, für B und C jeweils 2

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{je } 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{je } 3$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck $T^t A T$ eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei **2**

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mathematik 1 WS 2019/20

2. Übungsblatt – Gruppe GEO

27. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

28. Man bestimme den Rang der folgenden Matrizen je (2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 10 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

29. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssysystems (2)

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

30. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (2)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ -4x & - & 4y & - & 2z & = & -10 \end{array}$$

31. Besitzt das folgende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung? (1)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

32. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme je **2**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 8 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

33. Man ermittle die allgemeine Lösung des Gleichungssystems **2**

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & + & w & = & 4 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & w & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & - & 2w & = & -1 \end{array}$$

34. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System **2**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & + & (a^2-10)z & = & a \end{array}$$

(a) keine Lösung,

(b) eine eindeutig bestimmte Lösung,

(c) beliebig viele Lösungen besitzt.

35. Man bestimme die Summe, die Differenz $A - B$ und das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen **1**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Man berechne **1**

$$A - B^T, \ B^T \cdot B, \ A^T \cdot B^T - (B \cdot A)^T$$

mit den Matrizen von Beispiel 35.

37. Man bestimme - falls möglich - die Inverse folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Für die Matrix C und ihre Inverse C^{-1} gebe man eine geometrische Interpretation der durch sie vermittelten Transformation an. (Hinweis: Man betrachte die Bilder der kanonischen Basisvektoren)
Für A und B jeweils **1**, für C **2**

38. Man ermittle - falls möglich - die Inverse der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 10 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

39. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

regulär?

Man berechne in diesem Fall die Inverse.

40. Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen regulär? je **2**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

41. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für A und B jeweils **1**, für C **2**

42. Man berechne die Determinante der folgenden Matrizen unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen je **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

43. Mit Hilfe der Cramer'schen Regel berechne man die Lösung des Gleichungssystems **1**

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$$

44. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System **(1)**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & y & & & = & a \\ 3x & - & y & - & z & = & -10 \end{array}$$

eine Lösung mit $y = 1$ besitzt.

45. Welche geometrische Bedeutung hat die Koordinatentransformation $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ mit **(1)**

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} ?$$

Hinweis: Man ermittle zunächst die Bilder der kanonischen Basisvektoren und dann das Bild eines beliebigen Vektors.

46. Man bestimme die Matrix A die gemäß der Transformationsformel $\vec{y} = A\vec{x}$ eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\varphi = 120°$ beschreibt.
Welche Abbildung beschreibt die Matrix A^2, welche die Matrix A^{-1}? **(1)**

47. Man untersuche, ob die folgende Matrix othogonal ist, und berechne gegebenenfalls die Inverse **(2)**

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man beachte die Eigenschaften orthogonaler Matrizen!

48. Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für A **(1)**, für B und C jeweils **(2)**

49. Man diagonalisiere folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Für A **(1)**, für B und C jeweils **(2)**

50. Man ermittle die orthogonale Diagonalisierung der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{je } 2$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{je } 3$$

D.h. man bestimme eine orthogonale Matrix T so, dass der Ausdruck $T^t A T$ eine Diagonalmatrix ist.

51. Man bestimme eine symmetrische 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 und den dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ wobei **2**

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$