Fourierreihen

Einer auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definierten Funktion $f(x)$ kann ein (approximierendes) **trigonometrisches Polynom** (Fourier-Polynom) der Gestalt

$$S_n(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

zugeordnet werden.

Schreibweise: $f(x) \approx S_n(x)$ auf $[-\pi, \pi]$

Die Koeffizienten a_k, b_k sind dabei gegeben durch

$$a_k = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heißt **periodisch mit der Periode** T, wenn

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$

Beispiel. Die Funktionen $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ sind periodische Funktionen mit der Periode 2π .

Die Funktionen $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$ sind periodische Funktionen mit der Periode π .

Bemerkung. Das obige trigonometrische Polynom $S_n(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 2π .

Wird einer periodischen Funktion $f(x)$ mit der Periode $T = 2\pi$ das Polynom $S_n(x)$ zugeordnet, dann ist dies eine Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate, d.h. mit den angegebenen Koeffizienten a_k, b_k wird der mittlere quadratische Fehler

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \quad \text{minimal.}$$

Führt man nun den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, dann erhält man die der Funktion $f(x)$ zugeordnete **Fourier-Reihe**.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

(a_k, b_k wie zuvor angegeben)

Satz. Sei $f(x)$ stückweise stetig differenzierbar und 2π-periodisch.

a) In jedem Stetigkeitspunkt x gilt $S_n(x) \to f(x)$ bzw. $S(x) = f(x)$.

b) In jedem abgeschlossenen Intervall I , auf dem $f(x)$ stetig ist, ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, d.h. zu jeder beliebig kleinen ε-Umgebung um den Graph von $f(x)$ gibt es einen Index $N_0(\varepsilon)$, sodass

$$|S_N(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, N \geq N_0(\varepsilon) \quad , \quad \forall\, x \in I$$

c) An einer Sprungstelle x_0 konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel des linksseitigen Grenzwertes $f(x_0 - 0)$ und des rechtsseitigen Grenzwertes $f(x_0 + 0)$, i.e.

$$S(x) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} \; .$$

In der Umgebung einer Sprungstelle gibt es keine gleichmäßige Konvergenz (GIBB'sches Phänomen).

d) Wir schreiben $f(x) \sim S(x)$.

Bemerkung.

Hat die Funktion $f(x)$ die Periode T , dann betrachtet man die Transformation

$$\xi = \frac{2\pi}{T}x \quad \text{, i.e.} \quad x = \frac{T}{2\pi}\xi \quad , \quad x = 0 \;\to\; \xi = 0 \;,\; x = T \;\to\; \xi = 2\pi$$

Dann ist $\tilde{f}(\xi) = f(\frac{T\xi}{2\pi})$ eine 2π-periodische Funktion (bzgl. ξ) .

Allgemein gilt für eine Funktion $f(x)$ mit Periode $T = 2L$ folgende Darstellung ihrer Fourier-Reihe

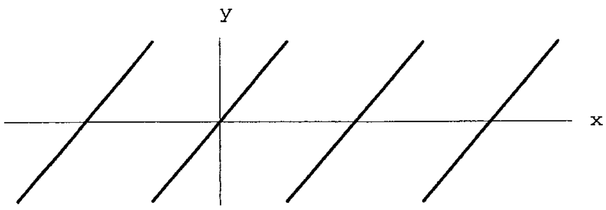
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{L} x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{L} x \quad \text{mit}$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx \quad , \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx$$

Beispiel. (**Sägezahnfunktion**)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

Diese kann nun durch die Forderung $f(x \pm 2\pi) = f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt werden (mit Periode 2π).



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos kx}{k^2} + \frac{x \sin kx}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad (\cos k\pi = (-1)^k)$$

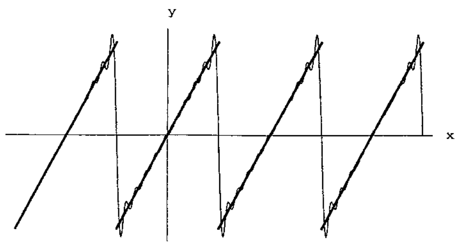
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x \cos kx}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

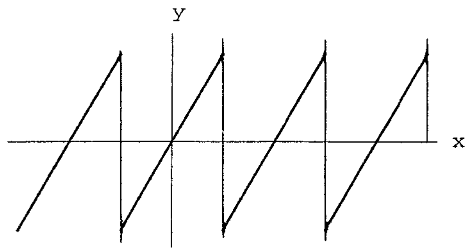
$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(0 - \frac{\pi(-1)^k}{k}\right) - \left(0 - \frac{(-\pi)(-1)^k}{k}\right) \right] = \frac{1}{\pi} \left(- \frac{2\pi(-1)^k}{k} \right) = \frac{2(-1)^{k-1}}{k}$$

Damit erhalten wir

$$f(x) \sim S(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx) \ .$$

Im folgenden sind die Funktion $f(x)$ und die Fourier-Polynome $S_{10}(x)$ bzw. $S_{100}(x)$ angeführt.





Bemerkung. Setzen wir speziell $x = \frac{\pi}{2}$, dann erhalten wir

$\frac{\pi}{2} = 2(1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \ldots)$ und damit eine Reihendarstellung für $\frac{\pi}{4}$, nämlich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

....

Gerade und ungerade Funktionen

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heißt **gerade** (bzw. **ungerade**), wenn $f(-x) = f(x) \quad , \ \forall\ x$ (bzw. $f(-x) = -f(x) \quad , \ \forall\ x$) .

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \cos \omega x$ ist gerade, die Funktion $f(x) = \sin \omega x$ ist ungerade.

Bemerkung. Das Produkt einer geraden Funktion mit einer ungeraden Funktion ist ungerade. Das Produkt von zwei geraden (bzw. ungeraden Funktionen) ist gerade.

Sei $g(x)$ ungerade. Dann ist $\int\limits_{-a}^{a} g(x)dx = 0$.

Beweis.

$$\int\limits_{-a}^{a} g(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} g(x)dx + \int\limits_{0}^{a} g(x)dx = I_1 + \int\limits_{0}^{a} g(x)dx$$

Substitution $x = -\xi$ liefert $I_1 = \int\limits_{a}^{0} g(-\xi) - d\xi = \int\limits_{a}^{0} g(\xi)d\xi =$

$$= -\int\limits_{0}^{a} g(\xi)d\xi = -\int\limits_{0}^{a} g(x)dx \ . \qquad \Box$$

Eine analoge Überlegung zeigt: Sei $g(x)$ gerade. Dann ist

$$\int\limits_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} g(x)dx \ .$$

Ist nun $f(x)$ eine ungerade Funktion mit Periode $T = 2\pi$, dann gilt gemäß dem Vorigen

$$a_k = 0 \ \ \forall\ k \quad \text{und} \quad b_k = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

Wir erhalten $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ (**Fourier-Sinusreihe**)

Ist $f(x)$ eine gerade Funktion mit Periode $T = 2\pi$, dann gilt

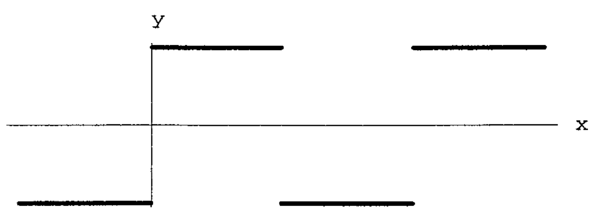
$$b_k = 0 \ \ \forall\ k \quad \text{und} \quad a_k = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

Wir erhalten $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ (**Fourier-Cosinusreihe**)

Beispiel. Wir definieren die **Ein- und Ausschaltfunktion** im Intervall $(-\pi, \pi)$ und setzen sie dann periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x)$ ist eine ungerade Funktion, daher $a_k = 0 \ \forall\ k$.



$$b_k = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} 1\cdot \sin kx \ dx = -\tfrac{2}{k\pi}\cos kx\,\Big|_0^{\pi} = \tfrac{2(1-(-1)^k)}{k\pi}$$

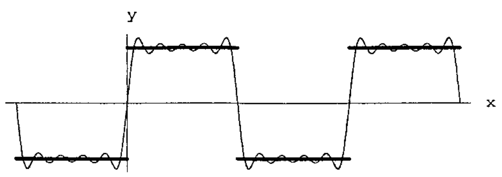
Folglich ist $\quad S(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k} \sin kx$.

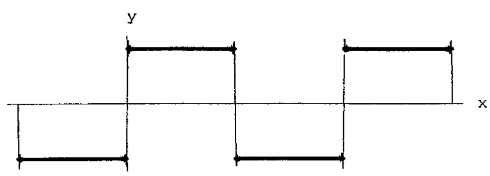
Wir beobachten weiters: ist k gerade, $k = 2n$, dann ist $b_k = b_{2n} = 0$.

Ist k ungerade, $k = 2n - 1$, dann ist $b_k = b_{2n-1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1}$.

Also $S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \ldots)$

Im folgenden sind die Fourier-Polynome S_{10} bzw. S_{100} dargestellt.



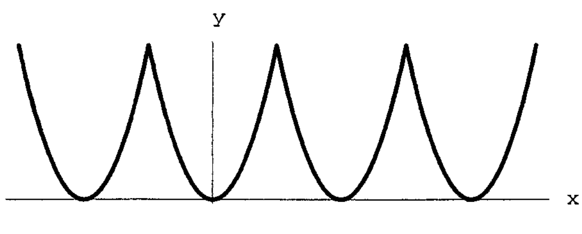


Beispiel. Betrachte $f(x) = x^2 \quad , \quad -\pi < x < \pi \quad , \quad f(x \pm 2\pi) = f(x)$.

$f(x)$ ist stetig und gerade, $T = 2\pi$, $b_k = 0 \quad \forall\, k$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx \; dx = \frac{4(-1)^k}{k^2} \quad , \; k \geq 1$$



Damit gilt $\quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx =$

$= \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \ldots)$

Bemerkung. Setzen wir speziell $x = \pi$, dann erhalten wir wegen $\cos k\pi = (-1)^k$, dass

$$\pi^2 = \tfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k = 4\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^2} \quad \text{bzw.}$$

$$\tfrac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^2} \quad \text{(EULER)}$$