Methode der finiten Differenzen

In diesem Verfahren werden eine Differentialgleichung und die zugehörigen Rand- und Anfangswerte durch ein System von linearen Gleichungen ersetzt, welche anschließend gelöst werden. Im besonderen werden die Ableitungen einer Funktion durch geeignete Differenzenquotienten ersetzt.

Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion $u(x)$ gilt nach dem Satz von Taylor

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \tfrac{h^2}{2!}u''(x) + \tfrac{h^3}{3!}u'''(x) + \ldots$$
$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \tfrac{h^2}{2!}u''(x) - \tfrac{h^3}{3!}u'''(x) + \ldots$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$u(x+h) - u(x-h) = 2hu'(x) + 2\tfrac{h^3}{3!}u'''(x) + \ldots$$

Wir definieren nun das **Landau-Symbol** $\mathcal{O}$ folgendermaßen:

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to \xi$, wenn eine Schranke $M \in \mathbb{R}$ existiert,

sodass $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$.

Damit kann der obige Ausdruck geschrieben werden in der Form

$$u(x+h) - u(x-h) = 2hu'(x) + \mathcal{O}(h^3) \quad \text{für} \quad h \to 0$$

Wir erhalten nun die folgenden Differenzenquotienten

$u'(x) \simeq \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ zentraler Differenzenquotient

$u'(x) \simeq \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$ linksseitiger Differenzenquotient

$u'(x) \simeq \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ rechtsseitiger Differenzenquotient

Des weiteren erhalten wir

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + \mathcal{O}(h^4) \quad \text{und damit}$$

$u''(x) \simeq \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$

Beispiel. Gesucht ist eine Funktion $u(x)$ mit

$-u'' = f(x)$ für $x \in [0,1]$

$u(0) = u(1) = 0$ (Randbedingungen)

Bemerkung. Dieses Problem kann natürlich sofort mittels zweifacher Integration gelöst werden.
Das RWP entspricht dem (stationären) Wärmeleitungsproblem in einem Stab der Länge 1 mit isolierten Enden und Wärmequelle $f(x)$.

Die Approximation dieses Problems erfolgt durch **Diskretisierung**, d.h. wir suchen die Funktionswerte an diskreten Stellen des Intervalls.

Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ durch Einführung von Teilungspunkten in $n+1$ Teilintervalle. Die Teilungspunkte sind an den Stellen

$x_k = kh$, $k = 0,1,2,\ldots,n+1$ mit $h = \frac{1}{n+1}$

Also ist $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, $\ldots, x_{n+1} = 1$.

Wenn wir nun näherungsweise die wahren Werte von u an diesen Stellen berechnen, und die Punkte $P_k(x_k, u(x_k))$ in eine Grafik eintragen und durch einen Polygonzug verbinden, erhalten wir ein ungefähres Bild vom Verlauf des Graphen von u .

Dazu setzen wir $u_k = u(x_k)$, $k = 0,1,2,\ldots,n+1$

An den Stellen $x_k = kh$, $1 \leq k \leq n$, wird die Differentialgleichung ersetzt durch die Gleichung

$-\frac{u(x_k+h)-2u(x_k)+u(x_k-h)}{h^2} = f(x_k)$

Auf diese Weise erhalten wir n Gleichungen für die n Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$, nämlich

$-u_{k+1} + 2u_k - u_{k-1} = h^2 f(x_k)$, $1 \leq k \leq n$

(Die Größen u_0 , u_{n+1} sind aus den Randbedingungen bekannt, wobei hier $u_0 = u_{n+1} = 0$).

Wählen wir etwa speziell $n = 5$ und damit $h = \frac{1}{6}$, ergibt sich

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad -u_2 + 2u_1 - u_0 = -u_2 + 2u_1 = \tfrac{1}{6^2} f(\tfrac{1}{6}) \\ k = 2: &\quad -u_3 + 2u_2 - u_1 = \tfrac{1}{6^2} f(\tfrac{2}{6}) \\ &\vdots \\ k = 5: &\quad -u_6 + 2u_5 - u_4 = 2u_5 - u_4 = \tfrac{1}{6^2} f(\tfrac{5}{6}) \end{aligned}$$

In Matrizenschreibweise erhalten wir also das folgende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6^2} \begin{pmatrix} f(\frac{1}{6}) \\ f(\frac{2}{6}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(\frac{5}{6}) \end{pmatrix}$$

Wir spezialisieren nun weiter und betrachten das Problem

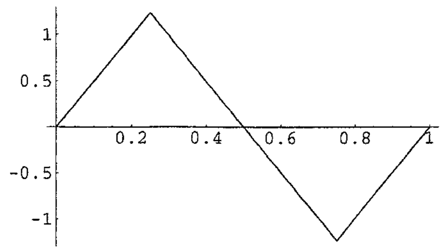
$$-u'' = 4\pi^2 \sin 2\pi x \quad , \; u(0) = u(1) = 0$$

a) Für $n = 3$ (also $h = \frac{1}{4}$) erhalten wir

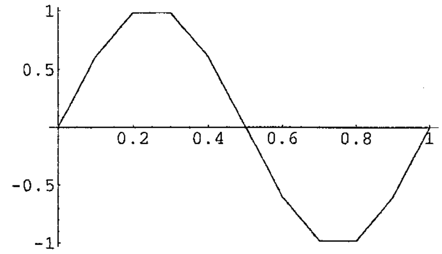
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{4\pi^2}{4^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und daraus $u_1 = \frac{\pi^2}{8}$, $u_2 = 0$, $u_3 = -\frac{\pi^2}{8}$

b) Für $n = 9$ (also $h = \frac{1}{10}$) erhalten wir den unten gezeichneten Polygonzug.

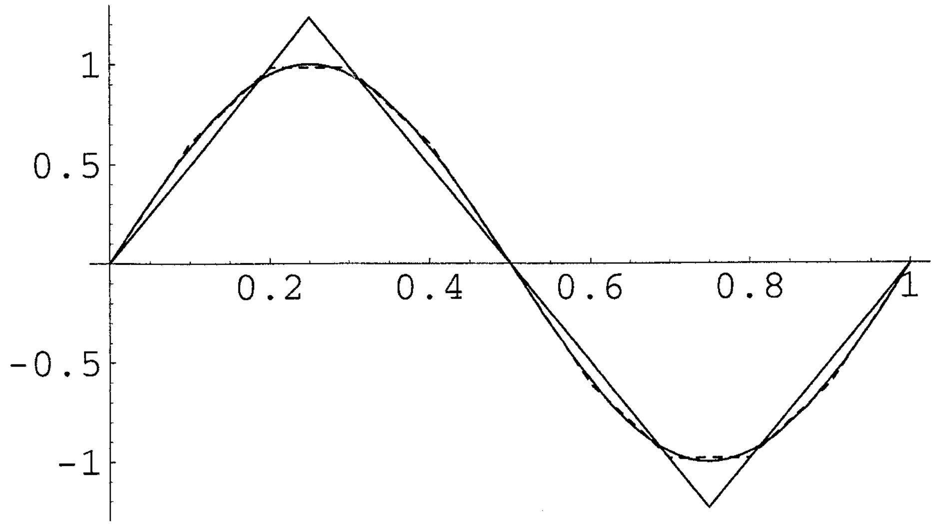


$n = 3$



$n = 9$

Der Vergleich mit der exakten Lösung $u = \sin 2\pi x$ ergibt



Vergleich mit exakter Lösung

Man kann erkennen, dass die Näherungslösung mit $n = 9$ recht gut an die exakte Lösung herankommt.

Beispiel. (Eindimensionale, stationäre Wärmeleitungsgleichung mit inhomogenen Randbedingungen)

$$u'' = -x^2 \quad , \; u(0) = 1 \; , \; u(1) = 2 \; , \quad 0 \le x \le 1$$

Wir approximieren die zweite Ableitung diesmal durch den rechtsseitigen Differenzenquotienten und erhalten mit $x_i = ih$ und $u(x_i) = u_i$ die Gleichungen

$$\frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+u_i}{h^2} = -x_i^2 \quad \text{bzw.} \quad u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i = -h^2 x_i^2$$

Sei $n = 3$.

Dann ist $h = \frac{1}{4}$ und $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$

$$i = 0: \qquad u_2 - 2u_1 + u_0 = -\tfrac{1}{4^2} x_0^2 = 0$$

$$i = 1: \qquad u_3 - 2u_2 + u_1 = -\tfrac{1}{4^2} x_1^2 = -\tfrac{1}{4^2}\tfrac{1}{4^2}$$

$$i = 2: \qquad u_4 - 2u_3 + u_2 = -\tfrac{1}{4^2} x_2^2 = -\tfrac{1}{4^2}\tfrac{1}{4}$$

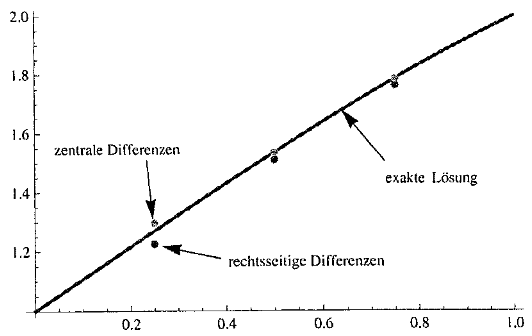
Die Randbedingungen liefern $u_0 = 1$ und $u_4 = 2$, folglich

$$u_2 - 2u_1 = -1$$

$$u_3 - 2u_2 + u_1 = -\tfrac{1}{256}$$

$$-2u_3 + u_2 = -\tfrac{129}{64}$$

mit der Lösung $u_1 \approx 1.25586$, $u_2 = 1.51172$, $u_3 = 1.76367$



Die exakte Lösung des Anfangswertproblems ist $u(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{13}{12}x + 1$ und damit

$$u(\tfrac{1}{4}) \approx 1.2705 \ , \ u(\tfrac{1}{2}) \approx 1.5365 \ , \ u(\tfrac{3}{4}) \approx 1.7861$$

Bemerkung. Wir können auch das zentrale Differenzenschema mit

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = -x_i^2 \quad \text{bzw.} \quad u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -h^2 x_i^2$$

verwenden. Damit ergibt sich

$$i = 1: \qquad u_2 - 2u_1 + u_0 = -\tfrac{1}{4^2}x_1^2 = -\tfrac{1}{4^2}\tfrac{1}{4^2}$$

$$i = 2: \qquad u_3 - 2u_2 + u_1 = -\tfrac{1}{4^2}x_2^2 = -\tfrac{1}{4^2}\tfrac{1}{2^2}$$

$$i = 3: \qquad u_4 - 2u_3 + u_2 = -\tfrac{1}{4^2}x_3^2 = -\tfrac{1}{4^2}\tfrac{3^2}{4^2}$$

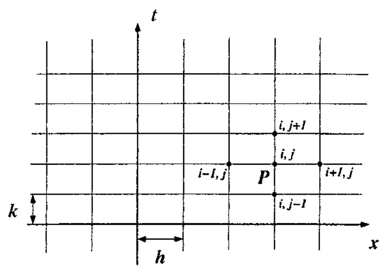
Daraus folgt $u_1 \approx 1.29653$, $u_2 \approx 1.53516$, $u_3 \approx 1.78516$.

Dies ist offenbar ein besseres Resultat als mit Hilfe des rechtsseitigen Differenzenschemas.

. . . .

Anwendungen auf partielle Dgln. 2. Ordnung

Die grundlegende Idee von vorher kann nun auch auf eine Funktion $u(x,t)$ von zwei Variablen ausgedehnt werden, indem über die xt-Ebene ein Gitter gelegt wird.



Die Gitterpunkte sind dabei die Punkte $P(x_i, t_j)$, wobei

$$x_i = i \cdot h \quad , \; i \in \mathbb{Z}$$

$$t_j = j \cdot k \quad , \; j \in \mathbb{N}_0$$

Wir setzen weiters $u|_P = u(x_i, t_j) = u_{i,j}$.

In Analogie zu vorher können wir nun folgende zentralen Differenzenschemata betrachten:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_P = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_i,t_j)} \simeq \frac{u((i+1)h,jk)-2u(ih,jk)+u((i-1)h,jk)}{h^2} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_P = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{(x_i,t_j)} \simeq \frac{u(ih,(j+1)k)-2u(ih,jk)+u(ih,(j-1)k)}{h^2} = \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}|_P = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}|_{(x_i,t_j)} \simeq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk}$
- $\frac{\partial u}{\partial x}|_P = \frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_i,t_j)} \simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$
- $\frac{\partial u}{\partial t}|_P = \frac{\partial u}{\partial t}|_{(x_i,t_j)} \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$

Daneben gibt es noch weitere mögliche rechts- bzw. linksseitige Differenzenquotienten, wie z.B.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_P \simeq \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_P \simeq \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2}$$

Damit kann man nun etwa eine partielle Differentialgleichung der Form

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xt} + cu_{tt} + u = f(x,t)$$

mit geeigneten Zusatzbedingungen behandeln.

Beispiel. $u_t = u_{xx} \quad , \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ t \geq 0$

RB: $u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad$ AB: $u(x,0) = f(x)$

Wir verwenden für $u_{xx}|_P \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$ den zentralen Differenzenquotienten,
und für $u_t|_P \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$ den rechtsseitigen Differenzenquotienten, und erhalten

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad , \ j = 0,1,2,\ldots \ , \quad i = 1,2,\ldots,n-1$$

Die Auswertung der RB ergibt $u_{0,j} = u_{n,j} = 0 \quad , \ j = 0,1,2,\ldots$.

Die Auswertung der AB liefert

$u_{i,0} = f(x_i) = f(ih) = f_i \quad , \ i = 0,1,2,\ldots,n$.

Wir erhalten $u_{i,j+1} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j}$ und setzen $r = \frac{k}{h^2}$, folglich

$$u_{i,j+1} = r \cdot u_{i+1,j} + (1-2r) \cdot u_{i,j} + r \cdot u_{i-1,j} \qquad (*)$$

Definition. Eine Approximation einer partiellen Dgl. durch ein finites Differenzenschema ist eine **"gute Approximation"**, wenn sie

• konvergent ist, d.h. wenn die approximierenden Werte $u_{i,j}$ für $h, k \to 0$ gegen den tatsächlichen Wert von u an der Stelle (x_i, t_j) konvergieren.

• stabil ist, d.h. eine geringfügige Änderung der AB/RB soll sich nur in einer kleinen Änderung der Lösung auswirken, und die Rundungsfehler sollen sich "in Grenzen" halten.

Bemerkung. Das Differenzenschema (*) ist eine gute Approximation, wenn alle Koeffizienten in (*) nicht negativ sind.

In unserem Fall bedeutet dass, $r \geq 0$, $1 - 2r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}$.

Wir wählen nun speziell $n = 4$ (und damit $h = \frac{1}{4}$) , $r = \frac{1}{2}$ und damit $k = rh^2 = \frac{1}{32}$.

Des weiteren sei der Anfangszustand $f(x) = \sin \pi x$. Dann ist

$f_1 = f(1 \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_2 = f(2 \cdot \frac{1}{4}) = 1$, $f_3 = f(3 \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Aus (*) erhalten wir nun

$j = 0 \ : \quad u_{i,1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0})$ und damit

$\quad i = 1 \ : \quad u_{1,1} = \frac{1}{2}(u_{2,0} + u_{0,0}) = \frac{1}{2}f_2$

$\quad i = 2 \ : \quad u_{2,1} = \frac{1}{2}(u_{3,0} + u_{1,0}) = \frac{1}{2}(f_3 + f_1)$

$\quad i = 3 \ : \quad u_{3,1} = \frac{1}{2}(u_{4,0} + u_{2,0}) = \frac{1}{2}f_2$

$j = 1 \ : \quad u_{i,2} = \frac{1}{2}(u_{i+1,1} + u_{i-1,1})$ und damit

$\quad i = 1 \ : \quad u_{1,2} = \frac{1}{2}(u_{2,1} + u_{0,1}) = \frac{1}{2}u_{2,1}$

$\quad i = 2 \ : \quad u_{2,2} = \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,1})$

$\quad i = 3 \ : \quad u_{3,2} = \frac{1}{2}(u_{4,1} + u_{2,1}) = \frac{1}{2}u_{2,1}$

$j \geq 2 \ : \quad u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$ und damit

$$
\begin{aligned}
i = 1 &: \quad u_{1,j+1} = \tfrac{1}{2}(u_{2,j} + u_{0,j}) = \tfrac{1}{2}u_{2,j} \\
i = 2 &: \quad u_{2,j+1} = \tfrac{1}{2}(u_{3,j} + u_{1,j}) \\
i = 3 &: \quad u_{3,j+1} = \tfrac{1}{2}(u_{4,j} + u_{2,j}) = \tfrac{1}{2}u_{2,j}
\end{aligned}
$$