

2. Übungsblatt – Gruppe 1

18. Man zeige, dass die Gleichung

①

$$f(x, y) = y^5 e^y - (2x^2 + 3) \sin y + x^2 y^2 - x \cos x = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.

Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x, y) = 0$ im Punkt P .

19. Von einem Drehkegel sind der Radius r und die Höhe h bekannt:

①

$$r = 10\text{cm}, h = 25\text{cm}$$

(a) Man berechne das Volumen V des Drehkegels, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

(b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von V , wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta r = \Delta h = 0.1\text{cm}$$

20. Für die Funktion

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^3$$

ermittle man das TAYLOR-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(1, 2)$. ①

21. Unter Verwendung bekannter TAYLOR-Polynome bestimme man das TAYLOR-sche Polynom P_3 der Funktion

$$\frac{\sin(xy)}{1 + xy}$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0, 0)$.

①

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

①

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion

①

$$f(x, y) = x^3 y + 12x^2 - 8y$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem Bereich $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$ definierten Funktion ①

$$f(x, y) = xy^2$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 7\}$$

definierten Funktion ①

$$f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: ①

$$f(x, y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung: ②

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \text{ NB: } x^2 + xy + y^2 = 3$$

28. Auf der Parabel $x = y^2$ bestimme man den Punkt P so, dass er von einem Punkt Q auf der Geraden $2y = x + 4$ den kleinsten Abstand besitzt. ②

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 3x - 4y$$

unter der Nebenbedingung ②

$$x^2 + y^2 = 25$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihr Produkt 24 ist und ihre Summe minimal wird. ①

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene ②

$$2x - y + z = 2$$

der vom Punkt $P(1, 2, 3)$ den kürzesten Abstand besitzt.

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche ①

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ u \tan v \\ 1 - e^{-v} \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq \pi/2$$

im Punkt $P(1, 1, 1 - e^{-\pi/4})$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation

①

$$\begin{aligned}x &= uv + vw + wu \\y &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\z &= w/u + u/v + v/w\end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 2, v = 3, w = 6$ eindeutig umkehrbar ist.

2. Übungsblatt – Gruppe 2

18. Man zeige, dass die Gleichung

①

$$f(x, y) = 1 - \cos(xy) + e^y \sin(x) - e^{2x^2+3y} \sin(y) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.

Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x, y) = 0$ im Punkt P .

19. Von dem Dreieck ABC sind folgende Größen bekannt:

①

$$b = 4m, c = 5m, \alpha = 30^\circ$$

(a) Man berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

(b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von F , wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta b = \Delta c = 0.2m, \Delta \alpha = 5^\circ$$

20. Für die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - \cos \frac{x}{y}$$

ermittle man das TAYLOR-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(\pi, 1)$. ①

21. Unter Verwendung bekannter TAYLOR-Polynome bestimme man das TAYLOR-sche Polynom P_3 der Funktion

$$\frac{e^x e^y}{1 + x + y}$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0, 0)$.

①

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

①

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion

①

$$f(x, y) = x^3 y + 12x^2 - 8y$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem abgeschlossenen Bereich des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(0, 0), B(2, 0), C(0, 3)$ definierten Funktion ①

$$f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$$

definierten Funktion ①

$$f(x, y) = 3x^2 - 2(y + 1)x + 3y - 1$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: ①

$$f(x, y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung: ②

$$f(x, y) = xy^2, \text{ NB: } 2x^2 + y^2 = 6$$

28. Man berechne den kürzesten Abstand zwischen dem Nullpunkt und der Hyperbel ②

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$$

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} - y^2$$

unter der Nebenbedingung ②

$$x^2 + y^2 = 1$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihre Summe 12 ist und das Produkt ihrer Quadrate maximal wird. ①

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene

$$x + y - z = 1$$

der vom Punkt $P(2, 1, -1)$ den kürzesten Abstand besitzt. ②

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche ①

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{u} \\ \sqrt{v} \\ \sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+,$$

im Punkt $P(1, 1, 1)$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation ①

$$\begin{aligned} x &= u + v + w \\ y &= u^2 + v^2 + w^2 \\ z &= 1/u + 1/v + 1/w \end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 1, v = 1, w = 1$ eindeutig umkehrbar ist.

2. Übungsblatt – Gruppe 3

18. Man zeige, dass die Gleichung

①

$$f(x, y) = -e^{y^2+x} \sin(x) + e^x \sin(y) - \sin(xy) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.

Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x, y) = 0$ im Punkt P .

19. Von einem Quader sind die Kantenlängen a, b und c bekannt:

①

$$a = 80\text{cm}, b = 60\text{cm}, c = 50\text{cm}$$

(a) Man berechne den Flächeninhalt F der Oberfläche des Quaders, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

(b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von F , wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta a = \Delta b = \Delta c = 0.2\text{cm}$$

20. Für die Funktion

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

ermittle man das TAYLOR-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(1, 0)$. ①

21. Unter Verwendung bekannter TAYLOR-Polynome bestimme man das TAYLOR-sche Polynom P_3 der Funktion

$$\frac{\sin(xy)}{1 + xy}$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0, 0)$.

①

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

①

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion

①

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem Bereich $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ definierten Funktion ①

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$$

definierten Funktion ①

$$f(x, y) = 3x^2 - 2(y + 1)x + 3y - 1$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: ①

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{2} - y$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung: ②

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \text{ NB: } x^2 + xy + y^2 = 3$$

28. Auf der Parabel $y = x^2$ bestimme man den Punkt P so, dass er von einem Punkt Q auf der Geraden $y = 2x - 4$ den kleinsten Abstand besitzt. ②

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 12x + 5y$$

unter der Nebenbedingung ②

$$x^2 + y^2 = 169$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihre Summe 24 ist und ihr Produkt maximal wird. ①

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene

$$x + 2y - z = -1$$

der vom Punkt $P(0, 1, 0)$ den kürzesten Abstand besitzt. ②

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche ①

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+$$

im Punkt $P(1, 0, 0)$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation

①

$$\begin{aligned}x &= uv + vw + wu \\y &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\z &= w/u + u/v + v/w\end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 2, v = 3, w = 6$ eindeutig umkehrbar ist.

2. Übungsblatt – Gruppe 4

18. Man zeige, dass die Gleichung ①

$$f(x, y) = 1 - \cos(xy) + e^y \sin(x) - e^{2x^2+3y} \sin(y) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.

Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x, y) = 0$ im Punkt P .

19. Von einem Drehkegel sind der Radius r und die Höhe h bekannt: ①

$$r = 10\text{cm}, h = 25\text{cm}$$

- (a) Man berechne das Volumen V des Drehkegels, wenn die gemessenen Werte exakt sind.
 (b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von V , wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta r = \Delta h = 0.1\text{cm}$$

20. Für die Funktion

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

ermittle man das TAYLOR-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(1, 0)$. ①

21. Unter Verwendung bekannter TAYLOR-Polynome bestimme man das TAYLOR-sche Polynom P_3 der Funktion

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0, 0)$. ①

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion ①

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 - 2y$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion ①

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2}$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem abgeschlossenen Bereich des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(0, 0), B(2, 0), C(0, 3)$ definierten Funktion ①

$$f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x, y) | x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$$

definierten Funktion ①

$$f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: ①

$$f(x, y) = (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung. ②

$$f(x, y) = 7 - x - 2y, \quad \text{NB: } x^2 + y^2 = 1$$

28. Auf der Parabel $y = -x^2$ bestimme man den Punkt P so, dass er von einem Punkt Q auf der Geraden $y = 4 - 2x$ den kleinsten Abstand besitzt. ②

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 12x + 5y$$

unter der Nebenbedingung ②

$$x^2 + y^2 = 169$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihre Summe 12 ist und das Produkt ihrer Quadrate minimal wird. ①

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene ②

$$2x - y + z = 2$$

der vom Punkt $P(1, 2, 3)$ den kürzesten Abstand besitzt.

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche ①

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+$$

im Punkt $P(1, 0, 0)$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation ①

$$\begin{aligned} x &= u - v + w \\ y &= 1/u + 1/v - 1/w \\ z &= u^2 - v^2 + w^2 \end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 2, v = 3, w = 1$ eindeutig umkehrbar ist.

2. Übungsblatt – Gruppe GEO

18. Man zeige, dass die Gleichung

①

$$f(x, y) = y^5 e^y - (2x^2 + 3) \sin y + x^2 y^2 - x \cos x = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.

Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x, y) = 0$ im Punkt P .

19. Von dem Dreieck ABC sind folgende Größen bekannt:

①

$$b = 4m, c = 5m, \alpha = 30^\circ$$

(a) Man berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

(b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von F , wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta b = \Delta c = 0.2m, \Delta \alpha = 5^\circ$$

20. Für die Funktion

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

ermittle man das TAYLOR-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(1, 0)$. ①

21. Unter Verwendung bekannter TAYLOR-Polynome bestimme man das TAYLOR-sche Polynom P_3 der Funktion

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0, 0)$.

①

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

①

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion

①

$$f(x, y) = x^3 y + 12x^2 - 8y$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem Bereich $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ definierten Funktion ①

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x, y) | x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$$

definierten Funktion ①

$$f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: ①

$$f(x, y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung: ②

$$f(x, y) = x y^2, \text{ NB: } 2x^2 + y^2 = 6$$

28. Auf der Parabel $y = x^2$ bestimme man den Punkt P so, dass er von einem Punkt Q auf der Geraden $y = 2x - 4$ den kleinsten Abstand besitzt. ②

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 12x + 5y$$

unter der Nebenbedingung ②

$$x^2 + y^2 = 169$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihr Produkt 24 ist und ihre Summe minimal wird. ①

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene

$$x + y - z = 1$$

der vom Punkt $P(2, 1, -1)$ den kürzesten Abstand besitzt. ②

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche ①

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+$$

im Punkt $P(1, 0, 0)$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation

①

$$\begin{aligned}x &= u - v + w \\y &= 1/u + 1/v - 1/w \\z &= u^2 - v^2 + w^2\end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 2, v = 3, w = 1$ eindeutig umkehrbar ist.