Mathematik 2 — SS 2018

2. Übungsblatt – Gruppe A

18. Man zeige, dass die Gleichung ①

$$f(x, y) = y^5\, e^y - (2x^2 + 3)\sin y + x^2\, y^2 - x\cos x = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.
Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x, y) = 0$ im Punkt P.

19. Von einem Drehkegel sind der Radius r und die Höhe h bekannt: ①

$$r = 10cm,\ h = 25cm$$

(a) Man berechne das Volumen V des Drehkegels, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

(b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von V, wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta r = \Delta h = 0.1cm$$

20. Für die Funktion

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^3$$

ermittle man das Taylor-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(1, 2)$. ①

21. Unter Verwendung bekannter Taylor-Polynome bestimme man das Taylor-sche Polynom P_3 der Funktion

$$\frac{\sin(xy)}{1 + xy}$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0, 0)$. ①

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion ①

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion ①

$$f(x, y) = x^3 y + 12x^2 - 8y$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem Bereich $D = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$ definierten Funktion (1)

$$f(x,y) = xy^2$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 7\}$$

definierten Funktion (1)

$$f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: (1)

$$f(x,y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung: (2)

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,, \text{ NB: } x^2 + xy + y^2 = 3$$

28. Auf der Parabel $x = y^2$ bestimme man den Punkt P so, dass er von einem Punkt Q auf der Geraden $2y = x + 4$ den kleinsten Abstand besitzt. (2)

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 3x - 4y$$

unter der Nebenbedingung (2)

$$x^2 + y^2 = 25$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihr Produkt 24 ist und ihre Summe minimal wird. (1)

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene (2)

$$2x - y + z = 2$$

der vom Punkt $P(1,2,3)$ den kürzesten Abstand besitzt.

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche (1)

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u\,\tan v \\ 1 - e^{-v} \end{pmatrix}\,, \quad u \in \mathbb{R},\ 0 \leq v \leq \pi/2$$

im Punkt $P(1,1,1-e^{-\pi/4})$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation ①

$$\begin{aligned} x &= uv + vw + wu \\ y &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ z &= w/u + u/v + v/w \end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 2, v = 3, w = 6$ eindeutig umkehrbar ist.

Mathematik 2 SS 2018

2. Übungsblatt – Gruppe B

18. Man zeige, dass die Gleichung **1**

$$f(x, y) = 1 - \cos(xy) + e^y \sin(x) - e^{2x^2+3y} \sin(y) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.
Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x, y) = 0$ im Punkt P.

19. Von dem Dreieck ABC sind folgende Größen bekannt: **1**

$$b = 4m,\ c = 5m,\ \alpha = 30°$$

(a) Man berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

(b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von F, wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta b = \Delta c = 0.2m,\ \Delta\alpha = 5°$$

20. Für die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - \cos\frac{x}{y}$$

ermittle man das TAYLOR-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(\pi, 1)$. **1**

21. Unter Verwendung bekannter TAYLOR-Polynome bestimme man das TAYLOR-sche Polynom P_3 der Funktion

$$\frac{e^x e^y}{1 + x + y}$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0, 0)$. **1**

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion **1**

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion **1**

$$f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem abgeschlossenen Bereich des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(0,0), B(2,0), C(0,3)$ definierten Funktion **1**

$$f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x,y)|0 \leq x, y \leq 1\}$$

definierten Funktion **1**

$$f(x,y) = 3x^2 - 2(y+1)x + 3y - 1$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: **1**

$$f(x,y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung: **2**

$$f(x,y) = x\,y^2\,,\ \text{NB: } 2x^2 + y^2 = 6$$

28. Man berechne den kürzesten Abstand zwischen dem Nullpunkt und der Hyperbel **2**

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$$

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} - y^2$$

unter der Nebenbedingung **2**

$$x^2 + y^2 = 1$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihre Summe 12 ist und das Produkt ihrer Quadrate maximal wird. **1**

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene

$$x + y - z = 1$$

der vom Punkt $P(2,1,-1)$ den kürzesten Abstand besitzt. **2**

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche **1**

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{u} \\ \sqrt{v} \\ \sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+,$$

im Punkt $P(1,1,1)$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation **1**

$$\begin{aligned} x &= u + v + w \\ y &= u^2 + v^2 + w^2 \\ z &= 1/u + 1/v + 1/w \end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 1, v = 1, w = 1$ eindeutig umkehrbar ist.

Mathematik 2 SS 2018

2. Übungsblatt – Gruppe C

18. Man zeige, dass die Gleichung ①

$$f(x,y) = -e^{y^2+x}\sin(x) + e^x\sin(y) - \sin(xy) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.
Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x,y) = 0$ im Punkt P.

19. Von einem Quader sind die Kantenlängen a, b und c bekannt: ①

$$a = 80cm,\ b = 60cm,\ c = 50cm$$

   (a) Man berechne den Flächeninhalt F der Oberfläche des Quaders, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

   (b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von F, wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta a = \Delta b = \Delta c = 0.2cm$$

20. Für die Funktion

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

ermittle man das Taylor-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(1,0)$. ①

21. Unter Verwendung bekannter Taylor-Polynome bestimme man das Taylor-sche Polynom P_3 der Funktion

$$\frac{\sin(xy)}{1+xy}$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0,0)$. ①

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion ①

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion ①

$$f(x,y) = e^x\cos y$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem Bereich $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ definierten Funktion **1**

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x, y)|0 \leq x, y \leq 1\}$$

definierten Funktion **1**

$$f(x, y) = 3x^2 - 2(y + 1)x + 3y - 1$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: **1**

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{2} - y$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung: **2**

$$f(x, y) = x^2 + y^2\,,\ \text{NB: } x^2 + xy + y^2 = 3$$

28. Auf der Parabel $y = x^2$ bestimme man den Punkt P so, dass er von einem Punkt Q auf der Geraden $y = 2x - 4$ den kleinsten Abstand besitzt. **2**

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 12x + 5y$$

unter der Nebenbedingung **2**

$$x^2 + y^2 = 169$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihre Summe 24 ist und ihr Produkt maximal wird. **1**

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene

$$x + 2y - z = -1$$

der vom Punkt $P(0, 1, 0)$ den kürzesten Abstand besitzt. **2**

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche **1**

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+$$

im Punkt $P(1, 0, 0)$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation 1

$$\begin{aligned} x &= uv + vw + wu \\ y &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ z &= w/u + u/v + v/w \end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 2, v = 3, w = 6$ eindeutig umkehrbar ist.

Mathematik 2 SS 2018

2. Übungsblatt – Gruppe D

18. Man zeige, dass die Gleichung (1)

$$f(x,y) = 1 - \cos(xy) + e^y \sin(x) - e^{2x^2+3y} \sin(y) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.
Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x,y) = 0$ im Punkt P.

19. Von einem Drehkegel sind der Radius r und die Höhe h bekannt: (1)

$$r = 10cm, \; h = 25cm$$

(a) Man berechne das Volumen V des Drehkegels, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

(b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von V, wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta r = \Delta h = 0.1cm$$

20. Für die Funktion

$$f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$

ermittle man das TAYLOR-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(1,0)$. (1)

21. Unter Verwendung bekannter TAYLOR-Polynome bestimme man das TAYLOR-sche Polynom P_3 der Funktion

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0,0)$. (1)

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion (1)

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 - 2y$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion (1)

$$f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem abgeschlossenen Bereich des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(0,0), B(2,0), C(0,3)$ definierten Funktion **1**

$$f(x,y) = 3 + xy - x - 2y$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x,y) | x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$$

definierten Funktion **1**

$$f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: **1**

$$f(x,y) = (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung. **2**

$$f(x,y) = 7 - x - 2y\,, \quad \text{NB: } x^2 + y^2 = 1$$

28. Auf der Parabel $y = -x^2$ bestimme man den Punkt P so, dass er von einem Punkt Q auf der Geraden $y = 4 - 2x$ den kleinsten Abstand besitzt. **2**

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 12x + 5y$$

unter der Nebenbedingung **2**

$$x^2 + y^2 = 169$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihre Summe 12 ist und das Produkt ihrer Quadrate minimal wird. **1**

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene **2**

$$2x - y + z = 2$$

der vom Punkt $P(1,2,3)$ den kürzesten Abstand besitzt.

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche 1

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\frac{1}{2}\,\ln(u^2+v^2) \end{pmatrix}, \quad u,v \in \mathbb{R}^+$$

im Punkt $P(1,0,0)$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation 1

$$\begin{aligned} x &= u - v + w \\ y &= 1/u + 1/v - 1/w \\ z &= u^2 - v^2 + w^2 \end{aligned}$$

in der Umgebung von $u = 2, v = 3, w = 1$ eindeutig umkehrbar ist.

Mathematik 2 SS 2018

2. Übungsblatt – Gruppe GEO

18. Man zeige, dass die Gleichung (1)

$$f(x,y) = y^5\, e^y - (2x^2+3)\sin y + x^2\, y^2 - x\cos x = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann, d.h. man kann y als Funktion von x in der Form $y = g(x)$ angeben.
Ferner bestimme man $g'(0)$ und die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x,y) = 0$ im Punkt P.

19. Von dem Dreieck ABC sind folgende Größen bekannt: (1)

$$b = 4m,\ c = 5m,\ \alpha = 30^\circ$$

(a) Man berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks, wenn die gemessenen Werte exakt sind.

(b) Unter Verwendung des Differentials schätze man den maximalen Fehler in der Berechnung von F, wenn die folgenden Messfehler auftreten:

$$\Delta b = \Delta c = 0.2m,\ \Delta\alpha = 5^\circ$$

20. Für die Funktion

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

ermittle man das Taylor-sche Polynom P_3 mit dem Entwicklungspunkt $P(1,0)$. (1)

21. Unter Verwendung bekannter Taylor-Polynome bestimme man das Taylor-sche Polynom P_3 der Funktion

$$f(x,y) = e^x\,\cos y$$

mit dem Entwicklungspunkt $P(0,0)$. (1)

22. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion (1)

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$$

23. Man bestimme Lage und Typ aller relativer Extrema der Funktion (1)

$$f(x,y) = x^3 y + 12x^2 - 8y$$

24. Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der auf dem Bereich $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ definierten Funktion **1**

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

25. Man bestimme die relativen Extrema und die Randextrema der auf dem Gebiet

$$D = \{(x, y)|x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$$

definierten Funktion **1**

$$f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$$

26. Man untersuche folgende Funktion auf relative und absolute Extrema: **1**

$$f(x, y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$$

27. Man berechne die Extremwerte der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung: **2**

$$f(x, y) = x\,y^2\,,\ \text{NB: } 2x^2 + y^2 = 6$$

28. Auf der Parabel $y = x^2$ bestimme man den Punkt P so, dass er von einem Punkt Q auf der Geraden $y = 2x - 4$ den kleinsten Abstand besitzt. **2**

29. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 12x + 5y$$

unter der Nebenbedingung **2**

$$x^2 + y^2 = 169$$

30. Man bestimme drei positive reelle Zahlen so, dass ihr Produkt 24 ist und ihre Summe minimal wird. **1**

31. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimme man den Punkt auf der Ebene

$$x + y - z = 1$$

der vom Punkt $P(2, 1, -1)$ den kürzesten Abstand besitzt. **2**

32. Gesucht sind die Gleichung der Tangentialebene und die der Flächennormalen für die Fläche **1**

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+$$

im Punkt $P(1, 0, 0)$.

33. Man untersuche, ob die Koordinatentransformation (1)

$$
\begin{aligned}
x &= u - v + w \\
y &= 1/u + 1/v - 1/w \\
z &= u^2 - v^2 + w^2
\end{aligned}
$$

in der Umgebung von $u = 2, v = 3, w = 1$ eindeutig umkehrbar ist.