Mehrfachintegrale

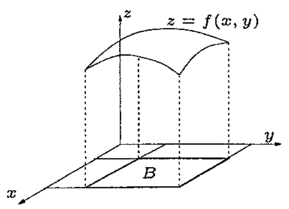
In der Vorlesung Mathematik 1 wurde das Integral (einer Variablen) als Fläche zwischen einer Kurve $f(x)$ und der x-Achse interpretiert. Der Ausdruck $A = \int_a^b f(x)dx$ wurde dabei als Grenzwert sogenannter Riemann'scher Summen definiert. Die dort gemachten Überlegungen können nun in den $\mathbb{R}^2$ bzw. in den $\mathbb{R}^3$ übertragen werden.

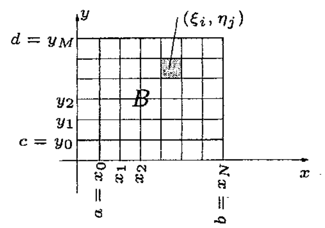
Doppelintegral

Wir betrachten zuerst eine über den Bereich

$$B = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \ : \ a \le x \le b \ , \ c \le y \le d\}$$

definierte Fläche $z = f(x, y)$ mit $f(x, y) \ge 0$ auf B .





Gesucht sei das Volumen zwischen der xy-Ebene und der Fläche $z = f(x, y)$.

Dazu zerlegt man die Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ derart, dass der Bereich B in kleine Rechtecke zerlegt wird.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b \quad , \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d$$

Dabei ist $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \ \ , \ i = 0, 1, \ldots, N-1$ und

$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j \ \ , \ j = 0, 1, \ldots, M-1$.

In jedem Teilrechteck $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ wird ein Punkt $P(\xi_i, \eta_j)$ gewählt mit $x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \ \ , \ \ y_j \le \eta_j \le y_{j+1}$.

Das Volumen der Säule S über dem Rechteck $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ wird nun durch das Volumen des Quaders Q (mit Höhe $f(\xi_i, \eta_j)$) approximiert.

Also $V_{\text{S}} \approx V_{\text{Q}} = f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$

Für das Volumen unter der gesamten Fläche ergibt sich damit eine (approximierende) Riemann'sche Summe

$$V \approx R(f; B; x_i; y_j; \xi_i; \eta_j) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

Wählt man nun eine Folge von Zerlegungen Z des Bereiches B, deren Feinheit $L(Z) = \max\limits_{i,j}(\Delta x_i, \Delta y_j)$ gegen Null konvergiert, dann kann man den Grenzwert

$$\lim_{L(Z) \to 0} R(f; B; x_i; y_j; \xi_i; \eta_j) \quad \text{betrachten.}$$

Satz. Ist die Funktion $f(x, y)$ stückweise stetig auf dem Bereich B, dann existiert dieser Grenzwert und ergibt für alle Zerlegungsfolgen, deren Feinheit gegen Null konvergiert, denselben Wert.

Dieser wird in der Form $\iint\limits_B f(x, y)dxdy$ geschrieben und heißt das **bestimmte Integral** von f über dem Bereich B.

Bemerkung. Falls $f(x, y)$ stetig auf B ist, gilt

$$\iint\limits_B f(x, y)dxdy = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=a}^{b} f(x, y)dx \right) dy = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x, y)dy \right) dx$$

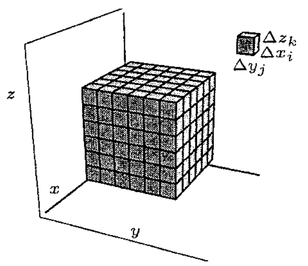
Dreifachintegral.

Geht man zu Funktionen von drei Variablen über, so erhält man ein Dreifachintegral.

Gegeben sei eine Funktion $w = f(x, y, z)$, die in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$, der einen Quader darstellt, definiert ist, d.h.

$$B = [a,b]\times[c,d]\times[p,q] = \{(x,y,z) \,:\, a \le x \le b\,,\; c \le y \le d\,,\; p \le z \le q\}$$

Man zerlegt wiederum die einzelnen Intervalle derart, dass B in kleine Teilquader unterteilt wird.



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b \quad , \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_M = d$$

$$p = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_Q = q$$

Analog wie zuvor erhalten wir die Größen

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad , \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j \quad , \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

In jedem Teilquader $[x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]\times[z_k, z_{k+1}]$ wählt man einen Punkt $P_{ijk}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$, wobei

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1} \quad , \quad y_j \le \eta_j \le j_{j+1} \quad , \quad z_k \le \zeta_k \le z_{k+1}$$

Dadurch erhalten wir eine Riemann'sche Summe

$$R(f;B;x_i;y_j;z_k;\xi_i;\eta_j;\zeta_k) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{Q-1} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta z_k$$

Wählt man wiederum eine Folge von Zerlegungen Z des Bereiches B , deren Feinheit $L(Z) = \max\limits_{i,j,k}(\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k)$ gegen Null konvergiert, dann kann man den Grenzwert

$$\lim_{L(Z)\to 0} R(f;B;x_i;y_j;z_k;\xi_i;\eta_j;\zeta_k) \quad \text{betrachten.}$$

Satz. Ist die Funktion $f(x,y,z)$ stückweise stetig auf dem Bereich B , dann existiert dieser Grenzwert und ergibt für alle Zerlegungsfolgen, deren Feinheit gegen Null konvergiert, denselben Wert.

Dieser wird in der Form $\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz$ geschrieben und heißt das **bestimmte Integral** von f über dem Bereich B . (Dreifachintegral)

Bemerkung. Falls $f(x,y,z)$ stetig auf B ist, gilt

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{z=p}^{q} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{z=p}^{q} \left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y,z)dy \right) dz \right) dx = \ldots \text{ usw.}$$

D.h. die Reihenfolge der Integration ist beliebig (insgesamt gibt es sechs Möglichkeiten).

. . . .

Allgemeinere Integrationsbereiche

Bislang war der Integrationsbereich ein Rechteck bzw. ein Quader. Hat man nun irgendeinen Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. $B \subseteq \mathbb{R}^3$) und eine Funktion $f(x,y)$ (bzw. $f(x,y,z)$) gegeben, kann man eine davon abgeleitete Funktion definieren durch

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{wenn } (x,y) \in B \\ 0 & \text{wenn } (x,y) \notin B \end{cases} \qquad \text{bzw.}$$

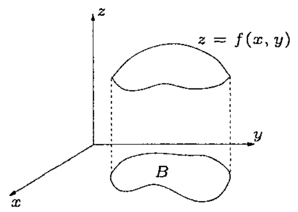
$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{wenn } (x,y,z) \in B \\ 0 & \text{wenn } (x,y,z) \notin B \end{cases}$$

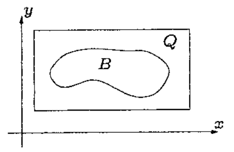
Ist nun Q ein Rechteck (bzw. Quader) und gilt $B \subseteq Q$, dann definieren wir

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \iint\limits_Q f^*(x,y)dxdy \qquad \text{bzw.}$$

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_Q f^*(x,y,z)dxdydz$$

Man kann zeigen, dass diese Vorgangsweise wohldefiniert ist.





$Q \ldots$ achsenparalleles Rechteck

Bemerkungen.

(a) $\iint_B 1\ dxdy$ (bzw. $\iiint_B 1\ dxdydz$) liefert den **Flächeninhalt** (bzw. das **Volumen**) des ebenen Bereiches B (bzw. des räumlichen Bereiches B).

(b) $dF = dxdy\ \ \ldots$ **Flächenelement** (erinnert an $\Delta x \cdot \Delta y$)

$dV = dxdydz\ \ \ldots$ **Volumselement** (erinnert an $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$)

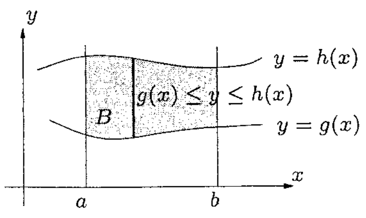
Satz. Die Integrale $\iint\limits_B f(x,y)dxdy$ und $\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz$ existieren, falls f stückweise stetig ist und der Rand von B stückweise glatt ist, d.h. f besteht aus endlich vielen stetigen Stücken und B besitzt einen stetig differenzierbaren Rand.

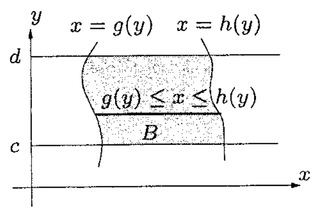
(In der Praxis sind diese Voraussetzungen zumeist erfüllt.)

Wir kommen nun zum wichtigen Begriff des **Normalbereiches**, zuerst in der Ebene.

Definition. $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich bzgl. der y-Achse**, wenn B dargestellt werden kann in der Form

$$B = \{(x,y)\ :\ a \le x \le b\ ,\ g(x) \le y \le h(x)\}\quad ,\ a,b \in \mathbb{R}$$





Definition. $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich bzgl. der x-Achse**, wenn B dargestellt werden kann in der Form

$$B = \{(x,y)\ :\ c \leq y \leq d\ ,\ g(y) \leq x \leq h(y)\} \quad , \ c,d \in \mathbb{R}$$

Für einen Normalbereich bzgl. der y-Achse gilt für die Integration

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

Für einen Normalbereich bzgl. der x-Achse gilt für die Integration

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx$$

Bemerkungen. Hier wird also ein Doppelintegral durch zwei Einfachintegrale berechnet, wobei auf die richtige Reihenfolge bei der Integration zu achten ist. (Die abschliessende Integration ist über feste Grenzen.)

Nicht-Normalbereiche können oft in eine Vereinigung von einzelnen Normalbereichen zerlegt werden.

. . . .

Anwendungen von Doppelintegralen

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bereich der xy-Ebene, und sei auf B eine Dichtefunktion $\rho = \rho(x,y)$ (Massendichte) gegeben. Dazu betrachtet man folgende Größen

- Die **Gesamtmasse**

  $M = \iint_B \rho(x,y)dxdy$

- Das **statische Moment bzgl. der x-Achse**

  $M_x = \iint_B y \cdot \rho(x,y)dxdy$

- Das **statische Moment bzgl. der y-Achse**

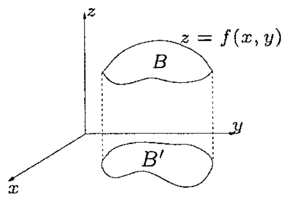
$M_y = \iint_B x \cdot \rho(x,y) dxdy$

- Den **Schwerpunkt** mit Koordinaten (ξ_s, η_s)

  $\xi_s = \frac{M_y}{M}$, $\eta_s = \frac{M_x}{M}$

Oberflächenberechnung

Gegeben sei eine Fläche im Raum, die über einen Bereich B' der xy-Ebene definiert ist. Dabei stellt B' die Projektion des Flächenstücks B in die xy-Ebene dar.



Der Flächeninhalt O des Flächenstücks B kann dann wie folgt berechnet werden.

1) **In kartesischen Koordinaten** für die Fläche $z = f(x,y)$

$O = \iint_{B'} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$

2) **In Parameterdarstellung** Für die Fläche gegeben durch

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

(Dabei variieren u, v in einem Bereich B^* der uv-Ebene.)

$O = \iint_{B^*} \sqrt{\vec{x}_u^2 \vec{x}_v^2 - (\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)^2}\, dudv$

Beispiel. Gesucht ist der Flächeninhalt jenes Bereichs der Ebene $z = ax + by + c$, der über dem Einheitsquadrat $B' = [0,1] \times [0,1]$ liegt.

$z = f(x,y) = ax + by + c$, $f_x = a$, $f_y = b$

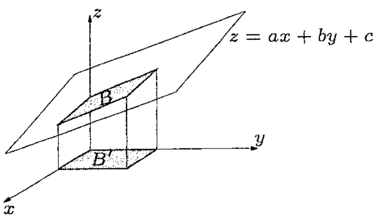
$$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}=\sqrt{1+a^2+b^2}$$

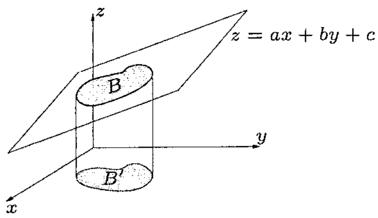
$$O=\iint_{B'}\sqrt{1+a^2+b^2}dxdy=\sqrt{1+a^2+b^2}\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1}dydx=\sqrt{1+a^2+b^2}$$

Betrachtet man einen beliebigen Bereich B' , dann erhält man analog

$$O=\sqrt{1+a^2+b^2}\iint_{B'}dxdy=$$

$$=\sqrt{1+a^2+b^2}\cdot F_{B'} \qquad F_{B'}\ \ldots \text{Flächeninhalt von } B'$$

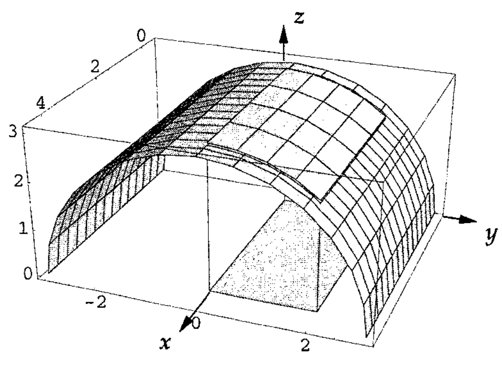




Beispiel. Man berechne den Flächeninhalt jenes Stücks des Zylinders

$$y^2+z^2=9$$

der über dem Rechteck mit den Eckpunkten $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(0,2)$ und $D(4,2)$ liegt.



Integrationsbereich $\quad B'=\{(x,y)\ :\ 0\le x\le 4\ ,\ 0\le y\le 2\}$

$z=\sqrt{9-y^2}$, $z_x=0$, $z_y=\frac{-y}{\sqrt{9-y^2}}$. Damit

$$O=\int\limits_{x=0}^{4}\int\limits_{y=0}^{2}\sqrt{1+\tfrac{y^2}{9-y^2}}\ dydx=4\int\limits_{y=0}^{2}\frac{3}{\sqrt{9-y^2}}dy=12\arcsin\tfrac{y}{3}\,\Big|_0^2=0.7297$$

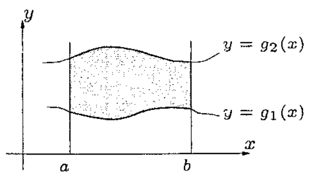
Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$ sind Bereiche, welche sich folgendermaßen beschreiben lassen:

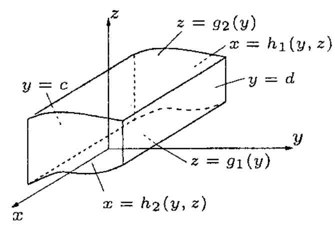
- 1. Variable bewegt sich innerhalb fester Grenzen
- 2. Variable bewegt sich zwischen einer unteren und einer oberen Begrenzungskurve (Funktionen der 1. Variablen)
- 3. Variable bewegt sich zwischen einer unteren und einer oberen Begrenzungsfläche (Funktionen der ersten beiden Variablen)

Also etwa

$$B: \quad a \le x \le b \ , \ g_1(x) \le y \le g_2(x) \ , \ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)$$

$$(\text{Oder:} \ \ B: \quad c \le y \le d \ , \ g_1(y) \le z \le g_2(y) \ , \ h_1(y,z) \le x \le h_2(y,z))$$





Für das Dreifachintegral gilt dann

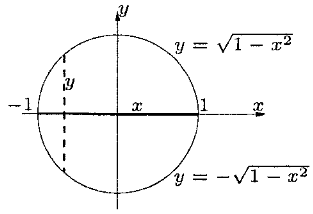
$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int\limits_{z=h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

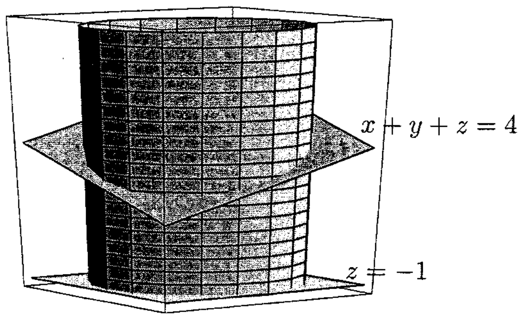
$$(\text{bzw.} \ \ \iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{z=g_1(y)}^{g_2(y)} \left(\int\limits_{x=h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right) dz \right) dy)$$

Bemerkung. Bei der Integration selbst geht es um die mehrmalige Ausführung von Integrationen bzgl. einer Variablen.

Die "Hauptschwierigkeit" ist oft die korrekte Beschreibung des Integrationsbereiches. Ist der Integrationsbereich (korrekt) beschrieben, dann ist auf die richtige Reihenfolge (!) bei den Integrationen zu achten (hier ist also **keine** beliebige Vertauschung der Reihenfolge erlaubt!).

Beispiel. Man berechne $\iiint_B 2xy\, dV$, wobei B jener Bereich des Zylinders $x^2+y^2 \le 1$ ist, der von den Ebenen $x+y+z=4$ und $z=-1$ begrenzt wird.



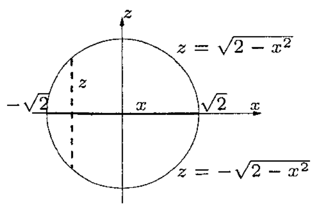


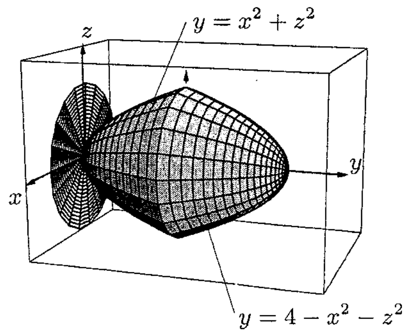
Die Projektion von B in die xy-Ebene ist der volle Einheitskreis.

Der Bereich B kann nun beschrieben werden durch

$$-1 \le x \le 1 \quad , \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad , \quad -1 \le z \le 4-y-x$$

Beispiel. Man berechne das Volumen des durch die Paraboloide $y = 4-x^2-z^2$ und $y = x^2+z^2$ begrenzten Bereiches B .





Grundsätzlich gilt: Sind zwei Flächen in der Form $y = f(x,z)$ und $y = g(x,z)$ gegeben, dann erhält man durch Gleichsetzen der y-Komponenten, also durch die Gleichung $f(x,z) = g(x,z)$, die Gleichung der Projektion der Schnittkurve der beiden Flächen in die xz-Ebene.

(Analoges gilt, wenn die beiden Flächen in der Form $z = f(x,y)$ und $z = g(x,y)$ vorliegen etc.)

Hier ist also die Projektion der Schnittkurve in die xz-Ebene gegeben durch

$$4 - x^2 - z^2 = x^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + z^2 = 2$$

Damit ergibt sich für B

$$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \;\; , \;\; -\sqrt{2 - x^2} \le z \le \sqrt{2 - x^2} \;\; , \;\; x^2 + z^2 \le y \le 4 - x^2 - z^2$$

. . . .

Anwendungen von Dreifachintegralen

Gegeben sei ein Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und dort eine Massendichte $\rho(x, y, z)$.

- **Volumen:** $V = \iiint_B dV$

- **Gesamtmasse:** $M = \iiint_B \rho(x, y, z)\; dV$

- **Schwerpunkt** $S(x_s, y_s, z_s)$**:**

  $x_s = \frac{\iiint_B x \cdot \rho(x,y,z)\; dV}{M} \;\; , \;\; y_s = \frac{\iiint_B y \cdot \rho(x,y,z)\; dV}{M} \;\; , \;\; z_s = \frac{\iiint_B z \cdot \rho(x,y,z)\; dV}{M}$

- **Trägheitsmomente**

  $I_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z)\; dV$ . . . bzgl. der x-Achse

  $I_y = \iiint_B (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z)\; dV$ . . . bzgl. der y-Achse

  $I_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z)\; dV$ . . . bzgl. der z-Achse

. . . .

Oberflächenintegrale

Wir betrachten ein Vektorfeld $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ und ein Flächenstück F gegeben durch

$z = f(x, y) \;\; , \;\; (x, y) \in B$ bzw. $\vec{x} = \vec{x}(u, v) \;\; , \;\; (u, v) \in B^*$

mit Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$.

Dann heisst das Integral

$$\iint_F \vec{K} \cdot \vec{n}\; dA = \iint_B \vec{K} \cdot \vec{n}\; dxdy =$$

$$= \iint_{B^*} \vec{K}(x(u,v), y(u,v) z(u,v)) \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)\; dudv$$

Oberflächenintegral von $\vec{K}$ **über** F .

Bemerkung. Wird $\vec{K}$ als stationäres (zeitunabhängiges) Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit aufgefasst, dann beschreibt $\iint_F \vec{K} \cdot \vec{n}\; dA$ den sogenannten Fluß durch F , d.h. das Flüssigkeitsvolumen, das in einer Zeiteinheit durch die Fläche F fließt.

. . . .

Transformationsformel für Mehrfachintegrale

Wir betrachten zuerst den ebenen Fall.

Gegeben sei das Doppelintegral $\iint_B f(x,y)\; dxdy$ über einen Bereich B der xy-Ebene.

Durch die Transformation $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ wird der Bereich B in einen Bereich B' der uv-Ebene abgebildet.

Das Flächenelement $dxdy$ transformiert sich dabei in $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$, wobei $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ den **Betrag** der Jacobi-Determinante $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ bezeichnet.

Es gilt also

$$\iint_B f(x,y) dxdy = \iint_{B'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Bemerkung. Beim Übergang von kartesischen auf Polarkoordinaten gilt

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\ .$$

Der dreidimensionale Fall verläuft völlig analog.

Gegeben sei das Integral $\iiint_B f(x,y,z)\ dxdydz$ über einen Bereich B der xyz-Raumes.

Durch die Transformation $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ wird der Bereich B in einen Bereich B' des uvw-Koordinatensystems abgebildet.

Das Volumselement $dxdydz$ transformiert sich dabei in $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$, wobei $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$ wiederum den Betrag der Jacobi-Determinante

$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$ bezeichnet.

Dementsprechend gilt die Transformationsformel

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint_{B'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Bemerkungen.

1) Beim Übergang auf Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ z = z$$

erhalten wir $dV = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| drd\varphi dz = r \cdot drd\varphi dz$

2) Beim Übergang auf Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta\ ,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta\ ,\ z = r\cos\vartheta$$

erhalten wir $dV = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}\right| drd\varphi d\vartheta = r^2\sin\vartheta \cdot drd\varphi d\vartheta$