03. Integralrechnung 2. Teil

Parameterabhängige Integrale

In zahlreichen Anwendungen gibt es für auftretende Funktionen eine Integraldarstellung, z.B. in der Form $F(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$ (wo in diesem Fall der Integrand nicht nur von der Integrationsvariablen x sondern auch von t abhängt).

Diesbezüglich sollen folgende Resulate präsentiert werden.

Satz.

1. Ist $f(x,t)$ stetig, dann auch die Funktion $F(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$ und es gilt $\lim\limits_{t\to t_0} F(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{t\to t_0} f(x,t)dx$.

2. Für die Funktion $\Phi(t) = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$ gilt

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx = \beta'(t)f(\beta(t),t) - \alpha'(t)f(\alpha(t),t) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

3. Speziell gilt damit für $\Phi(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$, dass $\Phi'(t) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.

Beispiel. $\Phi(t) = \int\limits_1^\pi \frac{\sin(tx)}{x}dx$

Dann ist $\Phi'(t) = \int\limits_1^\pi \cos(tx)dx$, $\Phi''(t) = -\int\limits_1^\pi x\sin(tx)dx$

Beispiel. $\Phi(t) = \frac{1}{k} \int\limits_0^t f(x)\sin[k(t-x)]dx$

$$\Phi'(t) = \frac{1}{k} \cdot 1 \cdot f(t) \cdot \sin[k(t-t)] + \frac{1}{k} \int_0^t f(x) k \cos[k(t-x)] dx =$$

$$= \int_0^t f(x) \cos[k(t-x)] dx$$

$$\Phi''(t) = f(t) \cos[k(t-t)] + \int_0^t f(x)(-k) \sin[k(t-x)] dx =$$

$$= f(t) - k \int_0^t f(x) \sin[k(t-x)] dx = f(t) - k^2 \Phi(t) \ .$$

Damit genügt $\Phi(t)$ offenbar der Differentialgleichung

$\Phi'' + k^2 \Phi = f(t)$ mit $\Phi(0) = 0$ und $\Phi'(0) = 0$.

. . . .

Kurvenintegrale

Bewegt man einen Körper in einem Kraftfeld $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$,

so ist die dabei verrichtete Arbeit definiert als das Produkt von Kraft $\times$ Weg.

Wir betrachten nun eine parametrisierte (und damit orientierte) Raumkurve

$$\mathcal{C} : \ \vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \ , \ t_0 \le t \le t_1 \ ,$$

mit Anfangspunkt $P_0 \equiv \vec{P}_0 = \vec{x}(t_0)$ und Endpunkt $P_1 \equiv \vec{P}_1 = \vec{x}(t_1)$.

Approximiert man die Kurve $\mathcal{C}$ durch einen Polygonzug von N Strecken (dies ergibt sich durch eine Zerlegung des Parameterintervalls), so ist die entlang der Strecke von $\vec{x}_i$ nach $\vec{x}_{i+1}$ mit $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$ verrichtete Arbeit gleich

$$W_i = \vec{K}(\vec{x}_i) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \ \text{ etc.}$$

Die von P_0 nach P_1 verrichtete Arbeit wird dann approximiert durch

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} \vec{K}(\vec{x}_i) \cdot \Delta\vec{x}_i = \sum_{i=0}^{N-1} \{P(\vec{x}(t_i))\Delta x_i + Q(\vec{x}(t_i))\Delta y_i + R(\vec{x}(t_i))\Delta z_i\}$$

Mit $\dot{x}(t_i) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$, $\dot{y}(t_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}$, $\dot{z}(t_i) \approx \frac{\Delta z_i}{\Delta t_i}$ folgt

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} \{P(\vec{x}(t_i))\dot{x}(t_i) + Q(\vec{x}(t_i))\dot{y}(t_i) + R(\vec{x}(t_i))\dot{z}(t_i)\}\Delta t_i$$

Geht man bei dieser Riemann'schen Summe mit der Feinheit der Zerlegung des Parameterintervalls gegen Null, erhält man das Integral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t))dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)dt = \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz$$

Dieses Integral wird als **Kurvenintegral** bzw. **Linienintegral** bezeichnet.

Man verwendet auch die Kurzschreibweise

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)dt = \int_{\mathcal{C}} \vec{K}d\vec{x} \ .$$

Bemerkungen.

(a) Wählen wir einen Punkt P auf der Kurve $\mathcal{C}$, so teilt dieser $\mathcal{C}$ in zwei Kurven $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$.

Es gilt dann $\int_{\mathcal{C}} \vec{K}d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{K}d\vec{x} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{K}d\vec{x}$.

(b) Sei $\mathcal{C}$ die (orientierte) Raumkurve von P_0 nach P_1 , und $-\mathcal{C}$ die entgegengesetzt durchlaufene Kurve von P_1 nach P_0 .

Dann gilt $\int_{\mathcal{C}} \vec{K}d\vec{x} = -\int_{-\mathcal{C}} \vec{K}d\vec{x}$.

(c) Seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ zwei (orientierte) Kurven, die von P_0 nach P_1 laufen. Dann ist $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + (-\mathcal{C}_2)$ eine geschlossene Kurve, welche in P_0 startet und endet.

Gilt $\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} = 0$, dann $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{K} d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{K} d\vec{x}$.

Definition. Ein Kurvenintegral (mit Vektorfunktion $\vec{K}$) heißt **wegunabhängig**, wenn für jede geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ gilt: $\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} = 0$.

(Dies ist gleichbedeutend damit, dass der Wert des Kurvenintegrals von P_0 nach P_1 unabhängig davon ist, welcher Verbindungsweg gewählt wird.)

Satz. Ein Kurvenintegral (mit Vektorfunktion $\vec{K}$) ist genau dann wegunabhängig, wenn $\operatorname{rot} \vec{K} = \vec{0}$, i.e. wenn

$$P_y = Q_x \ , \ Q_z = R_y \ , \ P_z = R_x \qquad \text{(Integrabilitätsbedingungen)}$$

Des weiteren sind auch **Linienintegrale bezüglich der Bogenlänge** gebräuchlich.

1) Für eine ebene Kurve $\mathcal{C} \ : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $a \leq t \leq b$ und eine stetige Funktion $f(x, y)$ definiert man

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

2) Für eine Raumkurve $\mathcal{C} \ : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $a \leq t \leq b$ und eine stetige Funktion $f(x, y, z)$ definiert man

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Bemerkung. Für $f \equiv 1$ erhalten wir die Länge der Kurve vom Punkt mit Parameterwert $t = a$ bis zum Punkt mit Parameterwert $t = b$ (**Bogenlänge**).

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{bzw.} \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

heißt auch das **Bogenelement**.