

Fourierreihen

Einer auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definierten Funktion $f(x)$ kann ein (approximierendes) **trigonometrisches Polynom** (Fourier-Polynom) der Gestalt

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$$

zugeordnet werden.

Schreibweise: $f(x) \approx S_n(x)$ auf $[-\pi, \pi]$

Die Koeffizienten a_k, b_k sind dabei gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heißt **periodisch mit der Periode** T , wenn

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beispiel. Die Funktionen $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ sind periodische Funktionen mit der Periode 2π .

Die Funktionen $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$ sind periodische Funktionen mit der Periode π .

Bemerkung. Das obige trigonometrische Polynom $S_n(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 2π .

Wird einer periodischen Funktion $f(x)$ mit der Periode $T = 2\pi$ das Polynom $S_n(x)$ zugeordnet, dann ist dies eine Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate, d.h. mit den angegebenen Koeffizienten a_k, b_k wird der mittlere quadratische Fehler

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \quad \text{minimal.}$$

Führt man nun den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, dann erhält man die der Funktion $f(x)$ zugeordnete **Fourier-Reihe**.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

(a_k, b_k wie zuvor angegeben)

Satz. Sei $f(x)$ stückweise stetig differenzierbar und 2π -periodisch.

a) In jedem Stetigkeitspunkt x gilt $S_n(x) \rightarrow f(x)$ bzw. $S(x) = f(x)$.

b) In jedem abgeschlossenen Intervall I , auf dem $f(x)$ stetig ist, ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, d.h. zu jeder beliebig kleinen ε -Umgebung um den Graph von $f(x)$ gibt es einen Index $N_0(\varepsilon)$, sodass

$$|S_N(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall N \geq N_0(\varepsilon) \quad , \quad \forall x \in I$$

c) An einer Sprungstelle x_0 konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel des linksseitigen Grenzwertes $f(x_0 - 0)$ und des rechtsseitigen Grenzwertes $f(x_0 + 0)$, i.e.

$$S(x) = \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2} .$$

In der Umgebung einer Sprungstelle gibt es keine gleichmäßige Konvergenz (GIBB'sches Phänomen).

d) Wir schreiben $f(x) \sim S(x)$.

Bemerkung.

Hat die Funktion $f(x)$ die Periode T , dann betrachtet man die Transformation

$$\xi = \frac{2\pi}{T}x \quad , \quad \text{i.e.} \quad x = \frac{T}{2\pi}\xi \quad , \quad x = 0 \rightarrow \xi = 0 \quad , \quad x = T \rightarrow \xi = 2\pi$$

Dann ist $\tilde{f}(\xi) = f\left(\frac{T\xi}{2\pi}\right)$ eine 2π -periodische Funktion (bzgl. ξ).

Allgemein gilt für eine Funktion $f(x)$ mit Periode $T = 2L$ folgende Darstellung ihrer Fourier-Reihe

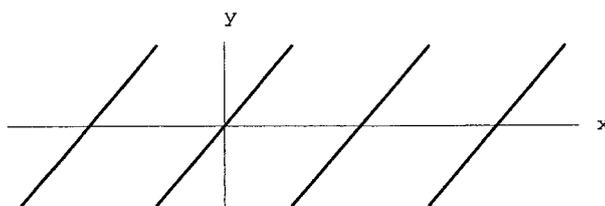
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{L}x \quad \text{mit}$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x \, dx \quad , \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L}x \, dx$$

Beispiel. (Sägezahnfunktion)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

Diese kann nun durch die Forderung $f(x \pm 2\pi) = f(x)$ auf ganz \mathbb{R} periodisch fortgesetzt werden (mit Periode 2π).



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

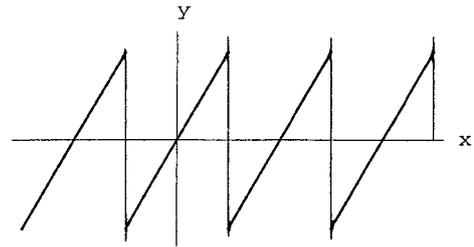
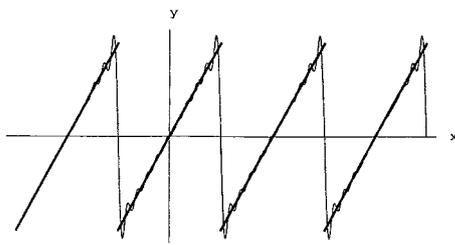
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos kx}{k^2} + \frac{x \sin kx}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (\cos k\pi = (-1)^k)$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x \cos kx}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(0 - \frac{\pi(-1)^k}{k} \right) - \left(0 - \frac{(-\pi)(-1)^k}{k} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\pi(-1)^k}{k} \right) = \frac{2(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$f(x) \sim S(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx) .$$

Im folgenden sind die Funktion $f(x)$ und die Fourier-Polynome $S_{10}(x)$ bzw. $S_{100}(x)$ angeführt.



Bemerkung. Setzen wir speziell $x = \frac{\pi}{2}$, dann erhalten wir

$\frac{\pi}{2} = 2(1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \dots)$ und damit eine Reihendarstellung für $\frac{\pi}{4}$, nämlich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

.....

Gerade und ungerade Funktionen

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heißt **gerade** (bzw. **ungerade**), wenn $f(-x) = f(x)$, $\forall x$ (bzw. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$).

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \cos \omega x$ ist gerade, die Funktion $f(x) = \sin \omega x$ ist ungerade.

Bemerkung. Das Produkt einer geraden Funktion mit einer ungeraden Funktion ist ungerade. Das Produkt von zwei geraden (bzw. ungeraden Funktionen) ist gerade.

Sei $g(x)$ ungerade. Dann ist $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$.

Beweis.

$$\int_{-a}^a g(x) dx = \int_{-a}^0 g(x) dx + \int_0^a g(x) dx = I_1 + \int_0^a g(x) dx$$

$$\text{Substitution } x = -\xi \text{ liefert } I_1 = \int_a^0 g(-\xi) - d\xi = \int_a^0 g(\xi) d\xi =$$

$$= - \int_0^a g(\xi) d\xi = - \int_0^a g(x) dx . \quad \square$$

Eine analoge Überlegung zeigt: Sei $g(x)$ gerade. Dann ist

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx .$$

Ist nun $f(x)$ eine ungerade Funktion mit Periode $T = 2\pi$, dann gilt gemäß dem Vorigen

$$a_k = 0 \quad \forall k \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Wir erhalten $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ (**Fourier-Sinusreihe**)

Ist $f(x)$ eine gerade Funktion mit Periode $T = 2\pi$, dann gilt

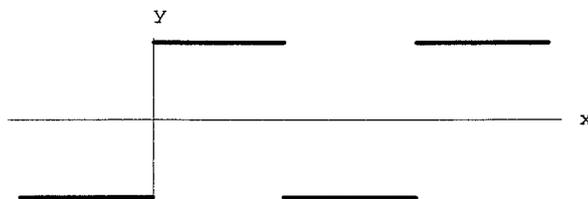
$$b_k = 0 \quad \forall k \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

Wir erhalten $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ (**Fourier-Cosinusreihe**)

Beispiel. Wir definieren die **Ein- und Ausschaltfunktion** im Intervall $(-\pi, \pi)$ und setzen sie dann periodisch auf ganz \mathbb{R} fort.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x)$ ist eine ungerade Funktion, daher $a_k = 0 \quad \forall k$.



$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin kx dx = -\frac{2}{k\pi} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi}$$

Folglich ist $S(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k} \sin kx$.

Wir beobachten weiters: ist k gerade, $k = 2n$, dann ist $b_k = b_{2n} = 0$.

Ist k ungerade, $k = 2n - 1$, dann ist $b_k = b_{2n-1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1}$.

Also $S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x = \frac{4}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$

Im folgenden sind die Fourier-Polynome S_{10} bzw. S_{100} dargestellt.

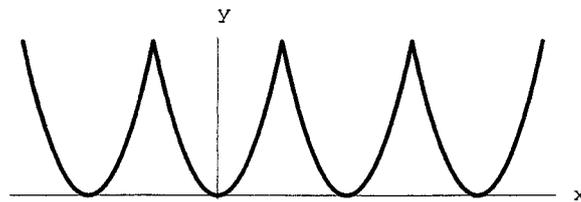


Beispiel. Betrachte $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$, $f(x \pm 2\pi) = f(x)$.

$f(x)$ ist stetig und gerade, $T = 2\pi$, $b_k = 0 \quad \forall k$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{4(-1)^k}{k^2}, \quad k \geq 1$$



Damit gilt $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx =$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \dots)$$

Bemerkung. Setzen wir speziell $x = \pi$, dann erhalten wir wegen $\cos k\pi = (-1)^k$, dass

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} (-1)^k = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (\text{EULER})$$