

5. Übungsblatt – Gruppe A

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = 64x^2 - 16x$

81. $f(x) = \frac{x^{2/3}}{4}(x+40)$

83. $f(x) = (4x-1)^{1/3}$

80. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

82. $f(x) = |12+4x-x^2|$

84. $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^4}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1}{3x^2-x+2}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+4}}{\sin 2x}$,

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$, e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = \sqrt{2x+1}, \quad f_3(x) = \tan x$$

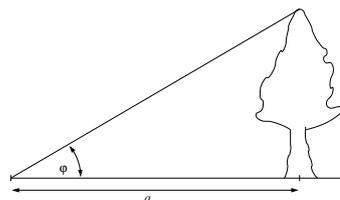
87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{3/4}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 16$, um den Wert von $f(15.96)$ zu approximieren.

88. Die Höhe eines Baumes wird dadurch bestimmt, dass man den Höhenwinkel φ zur Spitze des Baumes von einem Punkt, der $a = 22\text{m}$ vom Baum entfernt ist, misst.



Man berechne die Höhe des Baumes und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes, wenn der Winkel φ mit 30° und einem möglichen Fehler von 1° gemessen wird.

Hinweis: Man verwende für die Angabe der Winkel das Bogenmaß! (Weshalb?) (2)

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen: je (2)

$$f(x) = x^4 + 3x - 1, n = 4, x_0 = 1, \quad g(x) = a^x, a > 0, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für (2)

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion $\cos x$, bilde den Ausdruck $1 - \cos x$ und dividiere diesen dann durch x^2 .

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von (2)

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(0.99)$ und $P_n(0.99)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen (2)

$$\int_0^{0.5} \sin^2 x \, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.0396323$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei (2)

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & 0 & 3 \\ \hline y & 15 & 2 & -3 \end{array}$$

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 1$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$ mit der Funktion (2)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.

Man vergleiche die Werte $f(2)$ und $P_2(2)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke

je (2)

(a) $y = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 3$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4t \\ 3-3t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2$

(d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \ln t \\ t + 1/t \end{pmatrix}, \quad 1 \leq t \leq 4$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

(2)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 + \cos t \\ 2 + \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$

je (2)

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

(2)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t/3) + \cos(\frac{2}{3}t) \\ 2 \sin(t/3) - \sin(\frac{2}{3}t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 6\pi \quad (\text{Hypozykloide})$$

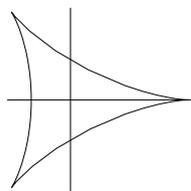


Abbildung 1: Hypozykloide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen je **1**

$$a) f(x, y) = \sqrt{y-x} \quad b) f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2) \quad c) f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen je **1**

$$a) f(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + xy^2 \quad b) f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \quad c) f(x, y) = \arctan(x\sqrt{y})$$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von **1**

$$f(x, y) = \frac{x}{x+y}$$

102. α) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q . **2**

β) In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? **1**

$$a) f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}, P_0(3, 4), Q(7, 1), \quad b) f(x, y) = \sin(xy), P_0(1, 0), Q(2, 1)$$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P_0 für **2**

$$f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, P_0(3, 0)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man $\operatorname{div}\vec{v}$, $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$ **2**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

5. Übungsblatt – Gruppe B

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

81. $f(x) = \frac{x}{4}(x - 40)^{2/3}$

83. $f(x) = (x - 3)^{1/3}$

80. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

82. $f(x) = |-3 + 4x - x^2|$

84. $f(x) = \frac{10(x^2 - 1)}{x^5}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 9}{2x^2 + 3x + 1}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x - 2}$, e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x^2}$, f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 2, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad f_3(x) = \cos 3x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{2/3}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 8$, um den Wert von $f(7.97)$ zu approximieren.

88. Die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks wird mit dem Wert $s = 6\text{m}$ gemessen, wobei der Messfehler maximal 1cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Flächeninhalts dieses Dreiecks auf Grund des Messfehlers auftreten kann.

②

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen:

je ②

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für ②

$$f(x) = \cos \frac{x}{2}, n = 8, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion $\cos x$ und ersetze dann x durch $x/2$.

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von ②

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(1.01)$ und $P_n(1.01)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen ②

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.601044$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei ②

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 1 & 3 \\ \hline y & 2 & -1 & 4 \end{array}$$

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 2$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = \pi/6, x_3 = \pi/4$ mit der Funktion ②

$$f(x) = \sin x$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(1)$ und $P_2(1)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je ②

(a) $y = \frac{4}{3}x^{3/2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 2$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12t \\ 5t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$(c) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^3/3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(d) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + \sin t \\ t \\ 2 - \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$

je ②

$$(a) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$$

$$(b) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \tan t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2 \quad (\text{Konchoide, linker Ast})$$

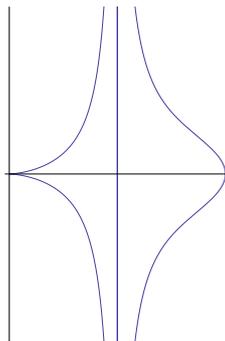


Abbildung 2: Konchoide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

je ①

$$a) \quad f(x, y) = \sqrt{x+y} \quad b) \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) \quad c) \quad f(x, y) = \frac{x-3y}{x+3y}$$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen je **1**

a) $f(x, y) = 6x^2 + 4xy^2 - y^3$ b) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ c) $f(x, y) = x e^{y/x}$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von **1**

$$f(x, y) = \ln(3x + 5y)$$

102. α) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q . **2**

β) In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? **1**

a) $f(x, y) = x e^y$, $P_0(2, 0)$, $Q(\frac{1}{2}, 2)$, b) $f(x, y) = \ln(2x+3y)$, $P_0(-1, 1)$, $Q(2, 3)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P_0 für **2**

$$f(x, y) = x\sqrt{y}, \quad P_0(1, 4)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man $\operatorname{div}\vec{v}$, $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$ **2**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ x + yz \\ xy - \sqrt{z} \end{pmatrix}$$

5. Übungsblatt – Gruppe C

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = x^3 + x$

81. $f(x) = \frac{x^{2/3}}{16}(x^2 - 16)$

83. $f(x) = (1 - 3x)^{2/3}$

80. $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$

82. $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

84. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \pi/6}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{3x^2 - x + 2}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin^2 x}{1 - \cos x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x}{x}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x$, f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = x^3 - x, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad f_3(x) = \sin 2x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{13}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 1$, um den Wert von $f(1.02)$ zu approximieren.

88. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert $r = 21\text{cm}$ gemessen, wobei der Messfehler maximal 0.05cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann.

②

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen:

je ②

$$f(x) = x^4 + 4x^2 - x, n = 4, x_0 = 2, \quad g(x) = \sqrt{1+x}, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für ②

$$f(x) = e^{x^2}, n = 10, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion e^x und ersetze dann x durch x^2 .

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von ②

$$f(x) = \sqrt{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(0.98)$ und $P_n(0.98)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen ②

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x} dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.493107$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei ②

x	1	3	5
y	-2	-1	1

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 0$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$ mit der Funktion ②

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(2.3)$ und $P_2(2.3)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je ②

(a) $y = 2x^{2/3}, \quad 1 \leq x \leq 8$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 + 3t \\ 2 - 4t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2$

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 + \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t} \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 0 \\ t^3/3 \end{pmatrix}$$

von $P(0, 0, 0)$ nach $Q(18, 0, 9)$.

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$

je ②

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/2$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos^3(t/4) \\ \sin^3(t/4) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 8\pi \quad (\text{Asteroide})$$

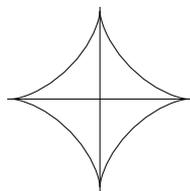


Abbildung 3: Asteroide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

je ①

a) $f(x, y) = \sqrt{2x + y}$ b) $f(x, y) = \ln(4 - 4x^2 - y^2)$ c) $f(x, y) = \frac{x - 4y}{x + 4y}$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen

je ①

a) $f(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 + xy^4$ b) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$ c) $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von

①

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

102. α) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q .

②

β) In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg?

①

a) $f(x, y) = x y^2$, $P_0(3, 2)$, $Q(-1, -1)$, b) $f(x, y) = y \ln x$, $P_0(1, -3)$, $Q(5, 0)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P_0 für

②

$$f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad P_0(6, 3)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man $\operatorname{div} \vec{v}$, $\operatorname{rot} \vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v})$

②

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} xyz \\ 0 \\ -x^2 y \end{pmatrix}$$

5. Übungsblatt – Gruppe D

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = 2 - x - x^3$

81. $f(x) = x^{1/3}(x^2 - 7)$

83. $f(x) = (2x - 1)^{2/3}$

80. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

82. $f(x) = |x^2 + 4x - 12|$

84. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{3x - 5}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x + 3}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cot 3x$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = 1 - x^2, \quad f_2(x) = \sqrt{1 - 2x}, \quad f_3(x) = \cot x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{17}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 1$, um den Wert von $f(1.03)$ zu approximieren.

88. Man berechne den maximalen relativen Fehler bei der Bestimmung des Volumens eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 1\text{m}$, wenn die Länge der Kante auf 3% genau gemessen wurde.

②

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen:

je ②

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 2x, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \tan x, n = 5, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für ②

$$f(x) = x e^{-x}, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Zunächst verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion e^x und ersetze dann x durch $-x$. Danach multipliziere man das Ergebnis mit x .

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von ②

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(1.02)$ und $P_n(1.02)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen ②

$$\int_0^{0.2} e^{-x^2} dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.197365$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei ②

x	2	4	6
y	-12	-8	-9

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 3$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/3, x_3 = \pi/2$ mit der Funktion ②

$$f(x) = \cos x$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.

Man vergleiche die Werte $f(1.8)$ und $P_2(1.8)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je ②

(a) $y = [4 - (x - 8)^{2/3}]^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 7$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12(1-t) \\ 5(t+2) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 3$

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

(d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

von $P(1, 0, 0)$ nach $Q(2, 1, 1)$.

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$

je ②

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t/3) + \cos(\frac{2}{3}t) \\ 2 \sin(t/3) - \sin(\frac{2}{3}t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 6\pi \quad (\text{Hypozykloide})$$

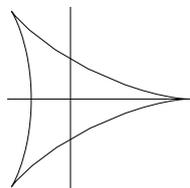


Abbildung 4: Hypozykloide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

je ①

a) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ c) $f(x, y) = \frac{x - 3y}{x + 3y}$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen

je ①

a) $f(x, y) = 2x^4 - x^2y^2 + y^4$ b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 - y^2}$ c) $f(x, y) = y^2 e^{xy}$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von ①

$$f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3$$

102. $\alpha)$ Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q . ②

$\beta)$ In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? ①

$a)$ $f(x, y) = x e^y$, $P_0(2, 0)$, $Q(\frac{1}{2}, 2)$, $b)$ $f(x, y) = \ln(2x+3y)$, $P_0(-1, 1)$, $Q(2, 3)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P_0 für ②

$$f(x, y) = x\sqrt{y}, \quad P_0(1, 4)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man $\operatorname{div}\vec{v}$, $\operatorname{rot}\vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$ ②

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ -xy \end{pmatrix}$$

5. Übungsblatt – Gruppe GEO

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79. $f(x) = x^3 + x$

81. $f(x) = \frac{x^{2/3}}{16}(x^2 - 16)$

83. $f(x) = (1 - 3x)^{2/3}$

80. $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$

82. $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

84. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{3x - 5}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x + 3}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cot 3x$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad f_3(x) = \tan x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{2/3}$$

für x in der Nähe von $x_0 = 8$, um den Wert von $f(7.97)$ zu approximieren.

88. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert $r = 21\text{cm}$ gemessen, wobei der Messfehler maximal 0.05cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann.

②

89. Man bestimme das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für folgende Funktionen:

je ②

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 2x, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \tan x, n = 5, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom $P_n(x)$ vom Grad n mit dem Entwicklungspunkt x_0 für ②

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion $\cos x$, bilde den Ausdruck $1 - \cos x$ und dividiere diesen dann durch x^2 .

91. Man ermittle das Taylorpolynom $P_n(x)$ von ②

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

um $x_0 = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleiche die Werte von $f(1.01)$ und $P_n(1.01)$.

92. Man verwende das Taylorpolynom $P_4(x)$ (mit $x_0 = 0$) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen ②

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x} dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis $I \approx 0.493107$.

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei ②

$$\begin{array}{c|ccc} x & 2 & 4 & 6 \\ \hline y & -12 & -8 & -9 \end{array}$$

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle $x = 3$.
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom $P_2(x)$, das an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$ mit der Funktion ②

$$f(x) = \sqrt{x}$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion f und das Polynom P_2 graphisch dar.
Man vergleiche die Werte $f(2)$ und $P_2(2)$.

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je ②

(a) $y = [4 - (x - 8)^{2/3}]^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 7$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12(1-t) \\ 5(t+2) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 3$

$$(c) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$(d) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + \sin t \\ t \\ 2 - \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt $\vec{x}(t_0)$

je ②

$$(a) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$$

$$(b) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t - \cos(2t) \\ 2 \sin t - \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{Kardioide})$$

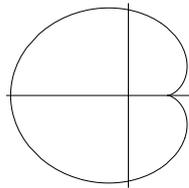


Abbildung 5: Kardioide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

je ①

$$a) \quad f(x, y) = \sqrt{x - y} \quad b) \quad f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2) \quad c) \quad f(x, y) = \frac{x - 2y}{x + 2y}$$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y der folgenden Funktionen

je ①

$$a) \quad f(x, y) = 6x^2 + 4xy^2 - y^3 \quad b) \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad c) \quad f(x, y) = x e^{y/x}$$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von

①

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

102. α) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt P_0 in Richtung des Punktes Q .

②

β) In welche Richtung hat f von P_0 aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg?

①

a) $f(x, y) = \sqrt{5x - 4y}$, $P_0(4, 1)$, $Q(3, 2)$, b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P_0(1, -1)$, $Q(2, -2)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P_0 für

②

$$f(x, y) = e^x \cos(xy), \quad P_0(0, 0)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man $\operatorname{div} \vec{v}$, $\operatorname{rot} \vec{v}$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v})$

②

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ -xy \end{pmatrix}$$