Mathematik 2 SS 2020

3. Übungsblatt – Gruppe A

34. Man führe die ersten beiden Schritte des NEWTON-Verfahrens zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems ①

$$\begin{aligned} x^2 + 2\cos y &= 2 \\ 2x^2 + y^2 &= 3 \end{aligned}$$

in der Nähe des Punktes $P_0(-1, 1)$ durch.

35. Für die folgenden Matrizen führe man die LR–Zerlegung durch je ①

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

36. Man bestimme die LR–Zerlegung der folgenden Matrix und löse dann das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dadurch, dass man zuerst $L\vec{y} = \vec{b}$ löst und anschließend $R\vec{x} = \vec{y}$. ①

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

37. Man ermittle die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen je ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. Mit Hilfe der Jacobi-Iteration bestimme man einen Näherungswert der Lösung des folgenden Gleichungssystems. Man verwende den Null-Vektor als Startvektor und iteriere solange, bis zwei aufeinander folgende Vektoren sich in allen Komponenten um weniger als 0.01 unterscheiden. Man vergleiche die Antwort mit der exakten Lösung. ①

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

39. Man rechne das Programm von Beispiel 38 mit der Gauß-Seidel-Iteration durch. **1**

40. Vorgelegt ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

Man untersuche, ob die Gauß–Seidel Iteration für dieses Gleichungssystem konvergiert.

41. Man berechne die Pseudoinverse der Matrix **1**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

42. Unter Verwendung der Pseudoinversen berechne man die Näherungslösung des Gleichungssystems **1**

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 3 \\ -x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 1 \end{array}$$

43. Mit Hilfe der QR-Zerlegung berechne man die Näherungslösung des linearen Gleichungssystems von Bsp. 42. **1**

44. Man bestimme ein approximierendes Polynom ersten Grades und ein approximierendes Polynom zweiten Grades (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) für folgende Punkte. Plotten Sie die Punkte (x_i, y_i) sowie die Polynome. je **1**

x_i	4.0	4.5	5.1	5.9	6.3	7.1
y_i	102	130	167	224	256	326

45. Gegeben sind die Daten

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	3.1	2.2	0.9	1.4	2.9

Man ermittle eine Funktion von der Form je **1**

(a) $f_1(x) = ax + b$,

(b) $f_2(x) = ax^2 + b$,

die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert. Fertigen Sie unter Verwendung eines Computerprogrammes eine graphische Darstellung der Punkte (x_i, y_i) und der gefundenen Funktionen $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ an.

Mathematik 2 — SS 2020

3. Übungsblatt – Gruppe B

34. Man führe die ersten beiden Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems (1)

$$\begin{aligned} x^2 - 2\cos y &= 2 \\ y^2 - x^2 &= 3 \end{aligned}$$

in der Nähe des Punktes $P_0(1,2)$ durch.

35. Für die folgenden Matrizen führe man die LR–Zerlegung durch je (1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

36. Man bestimme die LR–Zerlegung der folgenden Matrix und löse dann das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dadurch, dass man zuerst $L\vec{y} = \vec{b}$ löst und anschließend $R\vec{x} = \vec{y}$. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

37. Man ermittle die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen je (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. Mit Hilfe der Jacobi-Iteration bestimme man einen Näherungswert der Lösung des folgenden Gleichungssystems. Man verwende den Null-Vektor als Startvektor und iteriere solange, bis zwei aufeinander folgende Vektoren sich in allen Komponenten um weniger als 0.01 unterscheiden. Man vergleiche die Antwort mit der exakten Lösung. (1)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 17 \\ x_1 & - & 10x_2 & + & x_3 & = & 13 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 18 \end{array}$$

39. Man rechne das Programm von Beispiel 38 mit der Gauß-Seidel-Iteration durch. **1**

40. Vorgelegt ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

Man untersuche, ob die Gauß–Seidel Iteration für dieses Gleichungssystem konvergiert.

41. Man berechne die Pseudoinverse der Matrix **1**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Unter Verwendung der Pseudoinversen berechne man die Näherungslösung des Gleichungssystems **1**

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 1 \end{array}$$

43. Mit Hilfe der QR-Zerlegung berechne man die Näherungslösung des linearen Gleichungssystems von Bsp. 42. **1**

44. Man bestimme ein approximierendes Polynom ersten Grades und ein approximierendes Polynom zweiten Grades (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) für folgende Punkte. Plotten Sie die Punkte (x_i, y_i) sowie die Polynome. je **1**

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

45. Gegeben sind die Daten

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	3.1	2.2	0.9	1.4	2.9

Man ermittle eine Funktion von der Form je **1**

(a) $f_1(x) = ax + b$,

(b) $f_2(x) = ax^2 + b$,

die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert. Fertigen Sie unter Verwendung eines Computerprogrammes eine graphische Darstellung der Punkte (x_i, y_i) und der gefundenen Funktionen $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ an.

Mathematik 2 SS 2020

3. Übungsblatt – Gruppe C

34. Man führe die ersten beiden Schritte des NEWTON-Verfahrens zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems ①

$$\begin{aligned} \sin x + y^2 &= 2 \\ x^2 + y^2 &= 3 \end{aligned}$$

in der Nähe des Punktes $P_0(1, -1)$ durch.

35. Für die folgenden Matrizen führe man die LR–Zerlegung durch je ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Man bestimme die LR–Zerlegung der folgenden Matrix und löse dann das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dadurch, dass man zuerst $L\vec{y} = \vec{b}$ löst und anschließend $R\vec{x} = \vec{y}$. ①

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

37. Man ermittle die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen je ①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. Mit Hilfe der Jacobi-Iteration bestimme man einen Näherungswert der Lösung des folgenden Gleichungssystems. Man verwende den Null-Vektor als Startvektor und iteriere solange, bis zwei aufeinander folgende Vektoren sich in allen Komponenten um weniger als 0.01 unterscheiden. Man vergleiche die Antwort mit der exakten Lösung. ①

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

39. Man rechne das Programm von Beispiel 38 mit der Gauß-Seidel-Iteration durch. (1)

40. Vorgelegt ist das Gleichungssystem $A\,x = \vec{b}$ mit (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

Man untersuche, ob die Gauß–Seidel Iteration für dieses Gleichungssystem konvergiert.

41. Man berechne die Pseudoinverse der Matrix (1)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Unter Verwendung der Pseudoinversen berechne man die Näherungslösung des Gleichungssystems (1)

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$$

43. Mit Hilfe der QR-Zerlegung berechne man die Näherungslösung des linearen Gleichungssystems von Bsp. 42. (1)

44. Man bestimme ein approximierendes Polynom ersten Grades und ein approximierendes Polynom zweiten Grades (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) für folgende Punkte. Plotten Sie die Punkte (x_i, y_i) sowie die Polynome. je (1)

x_i	4.0	4.5	5.1	5.9	6.3	7.1
y_i	102	130	167	224	256	326

45. Gegeben sind die Daten je (1)

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	1.6	1.2	0.9	1.4	1.9

Man ermittle eine Funktion von der Form

(a) $f_1(x) = ax + b$,
(b) $f_2(x) = ax^2 + b$,

die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert. Fertigen Sie unter Verwendung eines Computerprogrammes eine graphische Darstellung der Punkte (x_i, y_i) und der gefundenen Funktionen $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ an.

Mathematik 2 SS 2020

3. Übungsblatt – Gruppe D

34. Man führe die ersten beiden Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems 1

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 5x &= 2 \\ x\,y^2 - x^2\,y &= -1 \end{aligned}$$

in der Nähe des Punktes $P_0(3,3)$ durch.

35. Für die folgenden Matrizen führe man die LR–Zerlegung durch je 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

36. Man bestimme die LR–Zerlegung der folgenden Matrix und löse dann das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dadurch, dass man zuerst $L\vec{y} = \vec{b}$ löst und anschließend $R\vec{x} = \vec{y}$. 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

37. Man ermittle die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen je 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

38. Mit Hilfe der Jacobi-Iteration bestimme man einen Näherungswert der Lösung des folgenden Gleichungssystems. Man verwende den Null-Vektor als Startvektor und iteriere solange, bis zwei aufeinander folgende Vektoren sich in allen Komponenten um weniger als 0.01 unterscheiden. Man vergleiche die Antwort mit der exakten Lösung. 1

$$\begin{array}{rcrcrcl} -7x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

39. Man rechne das Programm von Beispiel 38 mit der Gauß-Seidel-Iteration durch. (1)

40. Vorgelegt ist das Gleichungssystem $A\,x = \vec{b}$ mit (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

Man untersuche, ob die Gauß–Seidel Iteration für dieses Gleichungssystem konvergiert.

41. Man berechne die Pseudoinverse der Matrix (1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Unter Verwendung der Pseudoinversen berechne man die Näherungslösung des Gleichungssystems (1)

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 3 \\ -x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 1 \end{array}$$

43. Mit Hilfe der QR-Zerlegung berechne man die Näherungslösung des linearen Gleichungssystems von Bsp. 42. (1)

44. Man bestimme ein approximierendes Polynom ersten Grades und ein approximierendes Polynom zweiten Grades (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) für folgende Punkte. Plotten Sie die Punkte (x_i, y_i) sowie die Polynome. je (1)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	85	80	71	55	31	0	-22

45. Gegeben sind die Daten

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	-3.1	-2.2	-0.9	-1.4	-2.9

Man ermittle eine Funktion von der Form je (1)

(a) $f_1(x) = ax + b$,
(b) $f_2(x) = ax^2 + b$,

die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert. Fertigen Sie unter Verwendung eines Computerprogrammes eine graphische Darstellung der Punkte (x_i, y_i) und der gefundenen Funktionen $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ an.

Mathematik 2 SS 2020

3. Übungsblatt – Gruppe GEO

34. Man führe die ersten beiden Schritte des NEWTON-Verfahrens zur Bestimmung einer Näherungslösung des Gleichungssystems (1)

$$\begin{aligned} x^2 + 2\cos y &= 2 \\ 2x^2 + y^2 &= 3 \end{aligned}$$

in der Nähe des Punktes $P_0(-1, 1)$ durch.

35. Für die folgenden Matrizen führe man die LR–Zerlegung durch je (1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

36. Man bestimme die LR–Zerlegung der folgenden Matrix und löse dann das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dadurch, dass man zuerst $L\vec{y} = \vec{b}$ löst und anschließend $R\vec{x} = \vec{y}$. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

37. Man ermittle die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen je (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

38. Mit Hilfe der Jacobi-Iteration bestimme man einen Näherungswert der Lösung des folgenden Gleichungssystems. Man verwende den Null-Vektor als Startvektor und iteriere solange, bis zwei aufeinander folgende Vektoren sich in allen Komponenten um weniger als 0.01 unterscheiden. Man vergleiche die Antwort mit der exakten Lösung. (1)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

39. Man rechne das Programm von Beispiel 38 mit der Gauß-Seidel-Iteration durch. **1**

40. Vorgelegt ist das Gleichungssystem $A\,x = \vec{b}$ mit **2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

Man untersuche, ob die Gauß–Seidel Iteration für dieses Gleichungssystem konvergiert.

41. Man berechne die Pseudoinverse der Matrix **1**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Unter Verwendung der Pseudoinversen berechne man die Näherungslösung des Gleichungssystems **1**

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 3 \\ -x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 1 \end{array}$$

43. Mit Hilfe der QR-Zerlegung berechne man die Näherungslösung des linearen Gleichungssystems von Bsp. 42. **1**

44. Man bestimme ein approximierendes Polynom ersten Grades und ein approximierendes Polynom zweiten Grades (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) für folgende Punkte. Plotten Sie die Punkte (x_i, y_i) sowie die Polynome. je **1**

x_i	4.0	4.5	5.1	5.9	6.3	7.1
y_i	102	130	167	224	256	326

45. Gegeben sind die Daten

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	-3.1	-2.2	-0.9	-1.4	-2.9

Man ermittle eine Funktion von der Form je **1**

(a) $f_1(x) = ax + b$,
(b) $f_2(x) = ax^2 + b$,

die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert. Fertigen Sie unter Verwendung eines Computerprogrammes eine graphische Darstellung der Punkte (x_i, y_i) und der gefundenen Funktionen $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ an.