Mathematik 2 — SS 2020

6. Übungsblatt – Gruppe A

70. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Problems (exakte Differentialgleichung): je **1**

    (a) $(3x^2 + y)\,dx + (x - 8y)\,dy = 0$

    (b) $\dfrac{y^2 - 2}{x^2}\,dx - \dfrac{2y}{x}\,dy = 0\,, \quad y(2) = 3$

71. Ermitteln Sie zu folgenden Differentialgleichungen passende integrierende Faktoren und bestimmen Sie damit die Lösung: je **2**

    (a) $(5x + 9y^2 + 2)\,dx + 12y(x + 1)\,dy = 0$

    (b) $3x^2\,dx + (y - x^3 - 1)\,dy = 0$

72. Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert $y(2)$ der Lösung des Anfangswertproblems

    $$y' = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y}\,, \quad y(1) = 0.75\,,$$

    mit der Schrittweite $h = 0.25$ (unter Berücksichtigung von 3 Nachkommastellen) einmal je **1**

    (a) mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren und dann
    (b) mit dem Runge-Kutta-Verfahren.

73. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen: je **2**

    (a) $\ddot{x} + 3\dot{x} = 1 + 3t^2$

    (b) $y'' - y' - 2y = e^{2x}\cos x$

    (c) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 10x = 2e^{t}\cos t$

    (d) $y'' + 10y' + 25y = x\sin x$

74. Man ermittle die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen je **2**

    (a) $y'' - 2y' - 3y = e^{x}(3x - 8)$
    (b) $y'' + 4y' = -12\cos 2x - 4\sin 2x$

(c) $y'' - 4y' + 4y = 1 - e^{2x}$

(d) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

75. Lösen Sie folgende EULERsche Differentialgleichung: **2**

$$y'' - \frac{6}{x^2}\,y = 36x^2 \ln x$$

76. Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungssysteme von der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit den folgenden Systemmatrizen A : je **2**

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

77. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Systeme von Differentialgleichungen von der Form $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ mit je **2**

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

78. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem je **2**

(a)
$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - 2z \\ \dot{y} & = & 2x + y - 2z \\ \dot{z} & = & -x - y \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x(0) & = & 2 \\ y(0) & = & 0 \\ z(0) & = & -1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - 2y \\ \dot{y} & = & -x + 2y - 4z \\ \dot{z} & = & -y + z \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x(0) & = & 0 \\ y(0) & = & -1 \\ z(0) & = & 3 \end{array}$$

79. Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems **2**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4t \\ -4t \end{pmatrix}$$

80. Man ermittle die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems **2**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

81. Wenden Sie auf folgende Funktionen die LAPLACE-Transformation an: **2**

$$f_1(t) = t^2(t+4)(3t+4)\,, \quad f_2(t) = (t^2+16t+32)e^{t/4}\,, \quad f_3(t) = (3\cos 3t - 2\sin 3t)e^{-2t}$$

82. Bestimmen Sie die inverse LAPLACE-Transformierte der folgenden Funktionen: **2**

$$F_1(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{4}{3s+2}\,, \quad F_2(s) = \frac{s+4}{s^2+11}\,, \quad F_3(s) = \frac{2}{s^2+4s+13}$$

83. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung: je **2**

$$\text{(a)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^3+s+3}{s(s+1)(s^2+1)}\right\}\,, \quad \text{(b)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s-2)^3}\right\}$$

84. Man bestimme **2**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2se^{-4s}-e^{-s}}{s^2-9}\right\}$$

85. Gesucht ist die inverse LAPLACE-Transformierte der Funktionen je **2**

$$\text{(a)} \;\; F(s) = \frac{4s+1}{s^2+9}\,, \quad \text{(b)} \;\; F(s) = \frac{2+(s-2)(3-2s)}{(s-3)(s+2)(s-2)}$$

$$\text{(c)} \;\; F(s) = \frac{1-4s}{(s^2+1)(s^2+16)}\,, \quad \text{(d)} \;\; F(s) = e^{-s}\left(\frac{3}{s}-\frac{1}{s^2}\right) + e^{-3s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)$$

86. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme unter Verwendung der LAPLACE-Transformation: je **2**

(a) $y' - 2y = te^{4t}\,, \quad y(0) = 0$

(b) $y'' - 4y' - 5y = 0\,, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 1$

(c) $y'' - 3y' - 4y = 3\,, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(d) $y''' + 8y = 6e^{7t}\,, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -6, \quad y''(0) = 12$

87. Stellen Sie folgende Funktion unter Verwendung der HEAVISIDE-Funktion dar (Skizze!) und bestimmen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}$: **2**

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ 4-t & \text{für } 2 < t \le 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

88. Man bestimme die LAPLACE-Transformierte der Funktion **2**

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } \; 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{für } \; t \ge 1 \end{cases}$$

89. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems unter Verwendung der LAPLACE-Transformation je **2**

(a) $y' - 2y = 2t^2\big(H(t) - H(t-2)\big)\,, \quad y(0) = 1$

(b) $y'' - 4y = H(t) - 2H(t-3) + H(t-4)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$

90. Lösen Sie mittels der LAPLACE- Transformation und unter Verwendung des Faltungssatzes das Anfangswertproblem **2**

$$y^{IV} + 4y'' = 0\,, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\; y'''(0) = 4$$

91. Unter Verwendung der LAPLACE-Transformation löse man folgende Anfangswertprobleme je **2**

(a) $y'' + 3y' + 2y = e^t\,, \quad y(0) = 1\,,\; y'(0) = -6$

(b) $y'' + 4y = 3\sin t\,, \quad y(0) = 1\,,\; y'(0) = -1$

(c) $y'' + y = \begin{cases} 3 & 0 \le t < \pi \\ 0 & t \ge \pi \end{cases}\,, \quad y(0) = 0\,,\; y'(0) = 0$

(d) $y'' + 3y' + 2y = 6e^{2t} + 2\delta(t-1)\,, \quad y(0) = 2\,,\; y'(0) = -6$

Mathematik 2 SS 2020

6. Übungsblatt – Gruppe B

70. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Problems (exakte Differentialgleichung): je (1)

    (a) $(3x^2 + 4y^2)\,dx + (8xy - 3)\,dy = 0$

    (b) $\left(1 + \dfrac{2y}{x^2}\right) dx - \dfrac{2}{x}\,dy = 0\,, \quad y(2) = -1$

71. Ermitteln Sie zu folgenden Differentialgleichungen passende integrierende Faktoren und bestimmen Sie damit die Lösung: je (2)

    (a) $(y^2 - 9x + 6)\,dx + 4y(x-1)\,dy = 0$

    (b) $3x^2y\,dx + (5y^3 - 3x^3)\,dy = 0$

72. Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert $y(1.6)$ der Lösung des Anfangswertproblems

    $$y' = \ln(x) - \sqrt{y^2+1}\,, \quad y(1) = 1.25\,,$$

    mit der Schrittweite $h = 0.15$ (unter Berücksichtigung von 3 Nachkommastellen) einmal je (1)

    (a) mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren und dann
    (b) mit dem Runge-Kutta-Verfahren.

73. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen: je (2)

    (a) $y'' - 5y' + 6y = 18x^3 - 6$

    (b) $y'' + 2y' - 3y = 4xe^{2x}$

    (c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 5t\sin t$

    (d) $y'' - 6y' + 9y = 12xe^{x}$

74. Man ermittle die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen je (2)

    (a) $y'' - 6y' + 5y = e^{-3x}(35 - 8x)$
    (b) $y'' - 9y = -6\cos 3x - 12\sin 3x$

(c) $y'' + 16y = \sin 4x$

(d) $x^2 y'' + 5xy' + y = 0$

75. Lösen Sie folgende EULERsche Differentialgleichung: **2**

$$y'' - \frac{6}{x^2}\, y = 108(\ln x)^2$$

76. Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungssysteme von der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit den folgenden Systemmatrizen A : je **2**

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

77. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Systeme von Differentialgleichungen von der Form $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ mit je **2**

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

78. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem je **2**

(a)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 6x + 3y - 6z & \qquad x(0) &= -3 \\ \dot{y} &= 3y & y(0) &= 1 \\ \dot{z} &= 3x + 3y - 3z & z(0) &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y + 4z & \qquad x(0) &= 1 \\ \dot{y} &= 3x + 2y - z & y(0) &= 1 \\ \dot{z} &= 2x + y - z & z(0) &= 2 \end{aligned}$$

79. Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems **2**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 7e^{7t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

80. Man ermittle die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems **2**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ 6 - 3t \end{pmatrix}$$

81. Wenden Sie auf folgende Funktionen die LAPLACE-Transformation an: **2**

$$f_1(t) = 4(t-3)^3\,, \quad f_2(t) = (2t^3 - 9t^2)e^{t/3}\,, \quad f_3(t) = (3\sin 4t - 4\cos 4t)e^{-3t}$$

82. Bestimmen Sie die inverse Laplace-Transformierte der folgenden Funktionen: **2**

$$F_1(s) = \frac{3s+4}{s^3} + \frac{2}{3s+4}\,, \quad F_2(s) = \frac{2+s}{s^2+10}\,, \quad F_3(s) = \frac{s}{s^2-4s+5}$$

83. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung: je **2**

$$\text{(a)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3}{s^2(s^2+9)}\right\}\,, \quad \text{(b)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+1}{s(s+1)^3}\right\}$$

84. Man bestimme **2**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-s}+se^{-3s}}{s^2-4}\right\}$$

85. Gesucht ist die inverse Laplace-Transformierte der Funktionen je **2**

$$\text{(a)} \;\; F(s) = \frac{2s+6}{s^2+4}\,, \quad \text{(b)} \;\; F(s) = \frac{7+(s+4)(18-3s)}{(s-3)(s-1)(s+4)}$$

$$\text{(c)} \;\; F(s) = \frac{5s+3}{(s^2+1)(s^2+4)}\,, \quad \text{(d)} \;\; F(s) = e^{-3s}\left(\frac{6}{s}+\frac{7}{s^2}\right) + \frac{3e^{-6s}}{s^3}$$

86. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme unter Verwendung der Laplace-Transformation: je **2**

(a) $y' + 6y = te^{6t}\,, \quad y(0) = 0$

(b) $y'' - 7y' + 10y = 0\,, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$

(c) $y'' + 2y' - 15y = -2\,, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$

(d) $y''' - 4y' = 3e^{2t}\,, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 8$

87. Stellen Sie folgende Funktion unter Verwendung der Heaviside-Funktion dar (Skizze!) und bestimmen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}$: **2**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 2 \\ t-2 & \text{für } 2 < t \leq 3 \\ 1 & \text{für } t > 3 \end{cases}$$

88. Man bestimme die Laplace-Transformierte der Funktion **2**

$$f(t) = \begin{cases} te^t & \text{für } \; 0 \leq t < 1 \\ e^t & \text{für } \; t \geq 1 \end{cases}$$

89. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems unter Verwendung der LAPLACE-Transformation je **2**

(a) $y' + y = t^2\big(H(t) - H(t-1)\big)\,, \quad y(0) = 2$

(b) $y'' + 3y' = 2H(t) + H(t-2) - 3H(t-3)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$

90. Lösen Sie mittels der LAPLACE- Transformation und unter Verwendung des Faltungssatzes das Anfangswertproblem **2**

$$y^{IV} - 4y'' = 0\,, \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = -2$$

91. Unter Verwendung der LAPLACE-Transformation löse man folgende Anfangswertprobleme je **2**

(a) $y'' - y' - 6y = 2\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

(b) $y'' + y = t - 3\sin 2t\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -3$

(c) $y'' + y = \begin{cases} 3 & 0 \le t < 4 \\ 2t - 5 & t \ge 4 \end{cases}\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

(d) $y'' + y' - 2y = -10e^{-t} + 5\delta(t-1)\,, \quad y(0) = 7\,,\ y'(0) = -9$

Mathematik 2 SS 2020

6. Übungsblatt – Gruppe C

70. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Problems (exakte Differentialgleichung): je (1)

    (a) $y^2\,dx + (4y^2 + 2xy - 1)\,dy = 0$

    (b) $\left(y + \dfrac{4}{x^2}\right) dx + x\,dy = 0\,, \quad y(2) = -1$

71. Ermitteln Sie zu folgenden Differentialgleichungen passende integrierende Faktoren und bestimmen Sie damit die Lösung: je (2)

    (a) $(6x - y^2 - 4)\,dx + 4y(1 - x)\,dy = 0$

    (b) $(y + 1)^2\,dx + (1 + xy + x)\,dy = 0$

72. Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert $y(2)$ der Lösung des Anfangswertproblems

    $$y' = x^3 - y^3\,, \quad y(1.2) = 1.2\,2,$$

    mit der Schrittweite $h = 0.2$ (unter Berücksichtigung von 3 Nachkommastellen) einmal je (1)

    (a) mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren und dann
    (b) mit dem Runge-Kutta-Verfahren.

73. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen: je (2)

    (a) $2y'' + y' = (x + 1)^2$

    (b) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 2e^x \sin x$

    (c) $y'' + 4y' + 8y = 3xe^{-x}$

    (d) $9y'' - 12y' + 4y = 4x^2$

74. Man ermittle die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen je (2)

    (a) $y'' + 2y' + y = e^{2x}(9x^2 + 15x - 7)$
    (b) $y'' - 2y' + y = 5\cos 2x + 10\sin 2x$

(c) $y'' + 6y' + 9y = x + e^{-3x}$

(d) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

75. Lösen Sie folgende EULERsche Differentialgleichung: **2**

$$y'' - \frac{4}{x}\,y' = 196x^5 \ln x$$

76. Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungssysteme von der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit den folgenden Systemmatrizen A : je **2**

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

77. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Systeme von Differentialgleichungen von der Form $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ mit je **2**

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

78. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem je **2**

(a)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y - 2z & \qquad x(0) &= 2 \\ \dot{y} &= 2x - 4y - 2z & y(0) &= 0 \\ \dot{z} &= -2x + 2y & z(0) &= -1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - 2y - 2z & \qquad x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= 2x - 2z & y(0) &= -1 \\ \dot{z} &= 2x - 2y & z(0) &= 3 \end{aligned}$$

79. Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems **2**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix}$$

80. Man ermittle die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems **2**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -5e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

81. Wenden Sie auf folgende Funktionen die LAPLACE-Transformation an: **2**

$$f_1(t) = t^7 + 4t^3 + 1\,, \quad f_2(t) = (t^3 - 2t^2 + 5)e^{t/2}\,, \quad f_3(t) = e^{4t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$$

82. Bestimmen Sie die inverse LAPLACE-Transformierte der folgenden Funktionen: **2**

$$F_1(s) = \frac{6-s}{s^3} + \frac{5}{6-s}\,, \quad F_2(s) = \frac{1+s}{s^2+3}\,, \quad F_3(s) = \frac{2s}{s^2+2s+2}$$

83. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung: je **2**

$$\text{(a)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+4}{s^2(s^2+4)}\right\}\,, \quad \text{(b)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s-2)^3}\right\}$$

84. Man bestimme **2**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}-2se^{-s}}{s^2+3s}\right\}$$

85. Gesucht ist die inverse LAPLACE-Transformierte der Funktionen je **2**

$$\text{(a)} \;\; F(s) = \frac{s+1}{s^2-9}\,, \quad \text{(b)} \;\; F(s) = \frac{3-(s+1)(s-1)}{(s+4)(s-2)(s-1)}$$

$$\text{(c)} \;\; F(s) = \frac{1-s}{(4s^2+1)(s^2+1)}\,, \quad \text{(d)} \;\; F(s) = \frac{e^{-\pi s}(1-2s)}{s^2+4s+5}$$

86. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme unter Verwendung der LAPLACE-Transformation: je **2**

(a) $y' + 3y = te^{-t}\,, \quad y(0) = 0$

(b) $y'' + 5y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$

(c) $y'' + 5y' + 6y = 2\,, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

(d) $y''' - 9y' = 5e^{2t}\,, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 7$

87. Stellen Sie folgende Funktion unter Verwendung der HEAVISIDE-Funktion dar (Skizze!) und bestimmen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}$: **2**

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 3-t & \text{für } 1 < t \le 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

88. Man bestimme die LAPLACE-Transformierte der Funktion **2**

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } \; 0 \le t < 1 \\ e^{-2t} & \text{für } \; t \ge 1 \end{cases}$$

89. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems unter Verwendung der LAPLACE-Transformation je **2**

   (a) $y' + 4y = 4e^t H(t-2)\,, \quad y(0) = 2$

   (b) $y'' - 2y' = 3H(t) - H(t-1) - 2H(t-4)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$

90. Lösen Sie mittels der LAPLACE- Transformation und unter Verwendung des Faltungssatzes das Anfangswertproblem **2**

$$y^{IV} - 3y''' = 0\,, \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 4,\ y'''(0) = 12$$

91. Unter Verwendung der LAPLACE-Transformation löse man folgende Anfangswertprobleme je **2**

   (a) $y'' + y' - 2y = 2e^{3t}\,, \quad y(0) = -1\,,\ y'(0) = 4$

   (b) $y'' + y = 1\,, \quad y(0) = 2\,,\ y'(0) = 0$

   (c) $y'' - 2y' = \begin{cases} 4 & 0 \le t < 1 \\ 6 & t \ge 1 \end{cases}\,, \quad y(0) = -6\,,\ y'(0) = 1$

   (d) $y'' + y = \sin 3t + 2\delta(t - \pi/2)\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1$

Mathematik 2 SS 2020

6. Übungsblatt – Gruppe D

70. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Problems (exakte Differentialgleichung): je 1

    (a) $(12x^2 - 3y^2 + 1)\,dx - 6xy\,dy = 0$

    (b) $\dfrac{x^2 + y}{x^2}\,dx - \dfrac{1}{x}\,dy = 0\,, \quad y(1) = -3$

71. Ermitteln Sie zu folgenden Differentialgleichungen passende integrierende Faktoren und bestimmen Sie damit die Lösung: je 2

    (a) $3y(x^2 + 1)\,dx + (7x^3 + 21x + 9y^2)\,dy = 0$

    (b) $(4 + 6x + y^2)\,dx + 4y(1 + x)\,dy = 0$

72. Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert $y(1.6)$ der Lösung des Anfangswertproblems

    $$y' = 1 - ye^x\,, \quad y(1) = 0.4\,,$$

    mit der Schrittweite $h = 0.15$ (unter Berücksichtigung von 3 Nachkommastellen) einmal je 1

    (a) mit dem EULERschen Polygonzugverfahren und dann
    (b) mit dem RUNGE-KUTTA-Verfahren.

73. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen: je 2

    (a) $y'' - 8y' = x^2 + 1$

    (b) $y''' - 7y' + 6y = 3e^{3x} + 2$

    (c) $y'' - 2y' + 10y = 10x$

    (d) $y''' + 6y'' - 32y = \sin 2x + \cos 2x$

74. Man ermittle die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen je 2

    (a) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(1 + x)$
    (b) $y'' + 3y' + 2y = 7\cos x - \sin x$

(c) $y'' + 4y = \cos 2x$

(d) $x^2 y'' + xy' - y = 0$

75. Lösen Sie folgende EULERsche Differentialgleichung: **(2)**

$$xy'' - 4\,y' = 72x^2\,\ln x$$

76. Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungssysteme von der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit den folgenden Systemmatrizen A : je **(2)**

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

77. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Systeme von Differentialgleichungen von der Form $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ mit je **(2)**

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$$

78. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem je **(2)**

(a)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - z \qquad & x(0) &= -2 \\ \dot{y} &= 2y & y(0) &= -1 \\ \dot{z} &= -x + z & z(0) &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y \qquad & x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= x - 2z & y(0) &= 2 \\ \dot{z} &= -2y - z & z(0) &= 3 \end{aligned}$$

79. Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems **(2)**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

80. Man ermittle die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems **(2)**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 21e^{4t} \\ 8e^{-3t} \end{pmatrix}$$

81. Wenden Sie auf folgende Funktionen die LAPLACE-Transformation an: **(2)**

$$f_1(t) = 3t(t-2)^2 + 4\,, \quad f_2(t) = (t^4 - 48t^2)e^{t/2}\,, \quad f_3(t) = (\sin 5t - 5\cos 5t)e^{-t}$$

82. Bestimmen Sie die inverse LAPLACE-Transformierte der folgenden Funktionen: **(2)**

$$F_1(s) = \frac{5s+2}{s^3} + \frac{3}{5s+2}\,, \quad F_2(s) = \frac{3-s}{s^2+8}\,, \quad F_3(s) = \frac{1}{s^2-2s+5}$$

83. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung: je **(2)**

$$\text{(a)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+2s^2+8}{s^2(s^2+4)}\right\}\,, \quad \text{(b)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+4}{s(s+2)^3}\right\}$$

84. Man bestimme **(2)**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}+se^{-s}}{s^2-4s}\right\}$$

85. Gesucht ist die inverse LAPLACE-Transformierte der Funktionen je **(2)**

$$\text{(a)} \;\; F(s) = \frac{3s+4}{s^2-1}\,, \quad \text{(b)} \;\; F(s) = \frac{3-(s+1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s-2)}$$

$$\text{(c)} \;\; F(s) = \frac{3s+2}{(s^2+4)(s^2+9)}\,, \quad \text{(d)} \;\; F(s) = \frac{e^{-s}}{s^3} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

86. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme unter Verwendung der LAPLACE-Transformation: je **(2)**

(a) $y' + 4y = te^{3t}\,, \quad y(0) = 0$

(b) $y'' - 2y' - 8y = 0\,, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$

(c) $y'' - 2y' - 8y = 7\,, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

(d) $y''' - 2y'' = 4e^{-2t}\,, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -9, \quad y''(0) = 20$

87. Stellen Sie folgende Funktion unter Verwendung der HEAVISIDE-Funktion dar (Skizze!) und bestimmen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}$: **(2)**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 1 \\ t-1 & \text{für } 1 < t \leq 3 \\ 2 & \text{für } t > 3 \end{cases}$$

88. Man bestimme die LAPLACE-Transformierte der Funktion **(2)**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \; 0 \leq t < 4 \\ t & \text{für } \; t \geq 4 \end{cases}$$

89. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems unter Verwendung der LAPLACE-Transformation je **2**

(a) $y' + 4y = \frac{t^2}{2}\big(H(t) - H(t-4)\big)\,, \quad y(0) = 4$

(b) $y'' - 3y' = 2H(t) - 4H(t-1) + 2H(t-3)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$

90. Lösen Sie mittels der LAPLACE- Transformation und unter Verwendung des Faltungssatzes das Anfangswertproblem **2**

$$y^{IV} + 5y'' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -4,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 20$$

91. Unter Verwendung der LAPLACE-Transformation löse man folgende Anfangswertprobleme je **2**

(a) $y'' - 4y = 2e^{3t}\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1$

(b) $y'' + y = t\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 2$

(c) $y'' + 4y = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0$

(d) $y'' + 4y = 4 + \delta(t - 3\pi)\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$

Mathematik 2 SS 2020

6. Übungsblatt – Gruppe GEO

70. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Problems (exakte Differentialgleichung): je **1**

    (a) $(3x^2 + y)\,dx + (x - 8y)\,dy = 0$

    (b) $\dfrac{y^2 - 2}{x^2}\,dx - \dfrac{2y}{x}\,dy = 0\,, \quad y(2) = 3$

71. Ermitteln Sie zu folgenden Differentialgleichungen passende integrierende Faktoren und bestimmen Sie damit die Lösung: je **2**

    (a) $(y^2 - 9x + 6)\,dx + 4y(x - 1)\,dy = 0$

    (b) $3x^2y\,dx + (5y^3 - 3x^3)\,dy = 0$

72. Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert $y(2)$ der Lösung des Anfangswertproblems

    $$y' = x^3 - y^3\,, \quad y(1.2) = 1.2\,2,$$

    mit der Schrittweite $h = 0.2$ (unter Berücksichtigung von 3 Nachkommastellen) einmal je **1**

    (a) mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren und dann
    (b) mit dem Runge-Kutta-Verfahren.

73. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen: je **2**

    (a) $y'' - 8y' = x^2 + 1$

    (b) $y''' - 7y' + 6y = 3e^{3x} + 2$

    (c) $y'' - 2y' + 10y = 10x$

    (d) $y''' + 6y'' - 32y = \sin 2x + \cos 2x$

74. Man ermittle die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen je **2**

    (a) $y'' - 2y' - 3y = e^x(3x - 8)$
    (b) $y'' + 4y' = -12\cos 2x - 4\sin 2x$

(c) $y'' - 4y' + 4y = 1 - e^{2x}$

(d) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

75. Lösen Sie folgende EULERsche Differentialgleichung: **2**

$$y'' - \frac{6}{x^2}\, y = 108(\ln x)^2$$

76. Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungssysteme von der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit den folgenden Systemmatrizen A : je **2**

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

77. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Systeme von Differentialgleichungen von der Form $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ mit je **2**

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$$

78. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem je **2**

(a)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2z & \qquad x(0) &= 2 \\ \dot{y} &= 2x + y - 2z & y(0) &= 0 \\ \dot{z} &= -x - y & z(0) &= -1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y & \qquad x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= -x + 2y - 4z & y(0) &= -1 \\ \dot{z} &= -y + z & z(0) &= 3 \end{aligned}$$

79. Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems **2**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 7e^{7t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

80. Man ermittle die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems **2**

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -5e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

81. Wenden Sie auf folgende Funktionen die LAPLACE-Transformation an: **2**

$$f_1(t) = 3t(t-2)^2 + 4\,, \quad f_2(t) = (t^4 - 48t^2)e^{t/2}\,, \quad f_3(t) = (\sin 5t - 5\cos 5t)e^{-t}$$

82. Bestimmen Sie die inverse LAPLACE-Transformierte der folgenden Funktionen: **(2)**

$$F_1(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{4}{3s+2}\,, \quad F_2(s) = \frac{s+4}{s^2+11}\,, \quad F_3(s) = \frac{2}{s^2+4s+13}$$

83. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung: je **(2)**

$$\text{(a)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3}{s^2(s^2+9)}\right\}\,, \quad \text{(b)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+1}{s(s+1)^3}\right\}$$

84. Man bestimme **(2)**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}-2se^{-s}}{s^2+3s}\right\}$$

85. Gesucht ist die inverse LAPLACE-Transformierte der Funktionen je **(2)**

$$\text{(a)} \ F(s) = \frac{3s+4}{s^2-1}\,, \quad \text{(b)} \ F(s) = \frac{3-(s+1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s-2)}$$

$$\text{(c)} \ F(s) = \frac{3s+2}{(s^2+4)(s^2+9)}\,, \quad \text{(d)} \ F(s) = \frac{e^{-s}}{s^3} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

86. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme unter Verwendung der LAPLACE-Transformation: je **(2)**

(a) $y' - 2y = te^{4t}\,, \quad y(0) = 0$

(b) $y'' - 4y' - 5y = 0\,, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 1$

(c) $y'' - 3y' - 4y = 3\,, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(d) $y''' + 8y = 6e^{7t}\,, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -6, \quad y''(0) = 12$

87. Stellen Sie folgende Funktion unter Verwendung der HEAVISIDE-Funktion dar (Skizze!) und bestimmen Sie $\mathcal{L}\{f(t)\}$: **(2)**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 2 \\ t-2 & \text{für } 2 < t \leq 3 \\ 1 & \text{für } t > 3 \end{cases}$$

88. Man bestimme die LAPLACE-Transformierte der Funktion **(2)**

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } \ 0 \leq t < 1 \\ e^{-2t} & \text{für } \ t \geq 1 \end{cases}$$

89. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems unter Verwendung der LAPLACE-Transformation je **2**

(a) $y' + 4y = \frac{t^2}{2}\big(H(t) - H(t-4)\big)\,, \quad y(0) = 4$

(b) $y'' - 3y' = 2H(t) - 4H(t-1) + 2H(t-3)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$

90. Lösen Sie mittels der LAPLACE- Transformation und unter Verwendung des Faltungssatzes das Anfangswertproblem **2**

$$y^{IV} + 4y'' = 0\,, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 4$$

91. Unter Verwendung der LAPLACE-Transformation löse man folgende Anfangswertprobleme je **2**

(a) $y'' - y' - 6y = 2\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

(b) $y'' + y = t - 3\sin 2t\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -3$

(c) $y'' + y = \begin{cases} 3 & 0 \le t < 4 \\ 2t - 5 & t \ge 4 \end{cases}\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

(d) $y'' + y' - 2y = -10e^{-t} + 5\delta(t-1)\,, \quad y(0) = 7\,,\ y'(0) = -9$