# 00. Einleitung und Motivation

Bei den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wird der **Betrag** $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eingeführt, der geometrisch der Abstand zum Ursprung $0$ ist.

Analog wird im Raum der reellen $n-$Tupel $\mathbb{R}^n$ die **Norm** $\|x\|$ von $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ betrachtet, welche durch

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

definiert ist und geometrisch ebenfalls der Abstand zu $(0, 0, \ldots, 0)$ ist.

Unter Verwendung des Betrages (bzw. der Norm) kann nun ein Abstandsbegriff zwischen je zwei Elementen definiert werden,

- $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$
- $d(x, y) = \|x - y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$

Im $\mathbb{R}^2$ mit $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist dann

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Der oben definierte Abstandsbegriff erfüllt die Eigenschaften einer sogenannten **Metrik**, d.h. es gilt

(MR 1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \quad , \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(MR 2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y$ (Symmetrie)

(MR 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\, x, y, z$ (Dreiecksungleichung)

Ist allgemein $X \neq \emptyset$ eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, welche die Eigenschaften (MR 1)−(MR 3) erfüllt, dann heißt $d$ eine **Metrik** auf $X$ und das Paar $(X, d)$ ein **metrischer Raum**.

Somit sind $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ bzw. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ Beispiele für metrische Räume. Ein weiteres Beispiel ist die sogenannte **diskrete Metrik** auf einer Menge $X$ , welche durch $d(x, y) = 0$ für $x = y$ und $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ erklärt ist.

In metrischen Räumen können nun auf sinnvolle Weise Begriffe wie **Konvergenz** (bzw. konvergente Folge) und **Stetigkeit** definiert werden.

Seien $(X, d)$ und $(Y, \rho)$ metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Zu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$K(x, \varepsilon) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < \varepsilon\}$$

die offene $\varepsilon-$**Kugel** um $x \in X$ .

**Bemerkung.**

In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist $K(x, \varepsilon)$ das offene Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ .

In $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ ist $K(x, \varepsilon)$ die offene Kreisscheibe um $x$ mit Radius $\varepsilon$ .

Eine Folge $(x_n)$ in $X$ heißt **konvergent** gegen $a \in X$ , wenn

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad d(a, x_n) < \varepsilon \quad \text{für alle } \ n \geq N_\varepsilon$$

Das heißt: in jeder beliebigen $\varepsilon-$Kugel um $x$ liegen "fast alle" (bis auf endlich viele) Folgenglieder. Man schreibt auch $x_n \to a$ .

Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig im Punkt** $x_0 \in X$ , wenn

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \ \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{mit} \quad d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ \rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig** , wenn $f$ stetig in jedem Punkt $x_0 \in X$ ist.

**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass $f$ stetig in $x_0 \in X$ ist genau dann wenn für **jede** Folge $(x_n)$ mit $x_n \to x_0$ gilt dass $f(x_n) \to f(x_0)$ .

Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heißt **offen**, wenn $O = \emptyset$ oder zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon_x > 0$ existiert mit $K(x, \varepsilon_x) \subseteq O$ . (Mit jedem $x \in O$ liegt zugleich eine geeignete $\varepsilon-$Kugel um $x$ in $O$ .)

Im speziellen ist eine Teilmenge $\emptyset \neq O \subseteq \mathbb{R}$ genau dann offen, wenn mit jedem $x \in O$ ein geeignetes $\varepsilon_x > 0$ existiert mit $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq O$ .

Die Familie aller offenen Teilmengen eines metrischen Raumes $(X, d)$ wird mit $\tau_d$ bezeichnet und heißt die **durch die Metrik $d$ induzierte Topologie**. Sie hat u.a. folgende Eigenschaften:

(TR 1) $\emptyset\ , X \in \tau_d$

(TR 2) $O_1\ ,\ O_2 \in \tau_d\ \Rightarrow\ O_1 \cap O_2 \in \tau_d$

(TR 3) $O_i \in \tau_d\ \ \forall\, i \in I\ \Rightarrow\ \bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \tau_d$

Das heißt: der Durchschnitt von zwei (und damit endlich vielen) offenen Mengen ist wieder eine offene Menge, die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist wieder eine offene Menge.

**Beweis.** (TR 1) ist trivial.

Zu (TR 2): Seien $O_1\ ,\ O_2 \in \tau_d$ und $x \in O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Dann existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $K(x,\varepsilon_1) \subseteq O_1$ und $K(x,\varepsilon_2) \subseteq O_2$ . Mit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ist $K(x,\varepsilon) \subseteq O_1 \cap O_2$ .

Zu (TR 3): Sei $x \in O = \bigcup\limits_{i\in I} O_i$ . Dann existiert ein $i \in I$ mit $x \in O_i$ . Weil $O_i \in \tau_d$ , gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K(x,\varepsilon) \subseteq O_i \subseteq O$ . $\square$

**Bemerkung.** $K(x,\varepsilon) \in \tau_d\ \ \ \forall\, x \in X\ ,\ \forall\, \varepsilon > 0$

**Beweis.** Für $y \in K(x,\varepsilon)$ ist $d(x,y) < \varepsilon$ bzw. $r = \varepsilon - d(x,y) > 0$ . Wir zeigen, dass $K(y,r) \subseteq K(x,\varepsilon)$ . Sei $z \in K(y,r)$ . Mit der Dreiecksungleichung ist $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r = \varepsilon$ . $\square$

Obwohl der Begriff des metrischen Raumes in der Mathematik von zentraler Bedeutung ist, gibt es zahlreiche wichtige Räume, wo Konvergenz und Stetigkeit eine Rolle spielen, die sich allerdings **nicht** mittels einer zugrundeliegenden Metrik beschreiben lassen.

Dies führt zur Frage, auf welche Art und Weise sich metrische Räume verallgemeinern lassen, wo zum einen kein Abstandsbegriff mehr zur Verfügung steht, aber andererseits sinnvoll Konzepte von Konvergenz und Stetigkeit eingeführt werden können.

Eine geeignete Verallgemeinerung wird durch den Begriff der **Topologie** und des **topologischen Raumes** geliefert.