01. Mengen und Abbildungen

Wir erwähnen einige elementare Tatsachen, Notationen und Rechenregeln für Mengen und Abbildungen.

Seien X, Y Mengen.

- X, Y heißen **gleich**, $X = Y$, wenn $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$.
- X heißt **Teilmenge** von Y , $X \subseteq Y$, wenn $x \in X \Rightarrow x \in Y$.
- **Vereinigung von** X, Y : $X \cup Y = \{x : x \in X \text{ oder } x \in Y\}$.
- **Durchschnitt von** X, Y : $X \cap Y = \{x : x \in X \text{ und } x \in Y\}$.
- **Differenz von** X, Y : $X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ und } x \notin Y\}$.
- Für $A \subseteq X$ ist $X \setminus A$ das **Komplement** von A bzgl. X .
- X, Y heißen **disjunkt**, wenn $X \cap Y = \emptyset$. ($\emptyset$ ... leere Menge)
- $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ heißt **Potenzmenge** von X .

Bemerkung. Die Teilmengenrelation " $\subseteq$ " ist eine Partialordnung auf $\mathcal{P}(X)$, d.h. sie ist reflexiv $(A \subseteq A)$, antisymmetrisch $(A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B)$ und transitiv $(A \subseteq B$, $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C)$.

Man betrachtet auch oft (indizierte) **Mengenfamilien** $\{X_i : i \in I\}$. Dabei sind X_i Mengen, und I heißt die Indexmenge.

- $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x : \exists\, i \in I \text{ mit } x \in X_i\}$
- $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x : \forall\, i \in I \text{ gilt } x \in X_i\}$
- Sei X eine Menge und $\{X_i : i \in I\}$ eine Mengenfamilie.

  $$X \setminus (\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i) \quad , \quad X \setminus (\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i)$$

(Regeln von de Morgan)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

- Zu $A \subseteq X$ heißt $f(A) = \{y \in Y \ : \ \exists\, x \in A \text{ mit } f(x) = y\} \subseteq Y$ das **Bild von** A .

- Zu $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) = \{x \in X \ : \ f(x) \in B\} \subseteq X$ das **Urbild von** B .

- Es gilt $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ und $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Zu zwei gegebenen Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ kann man eine **Komposition** (bzw. **Hintereinanderschaltung, Verknüpfung**) definieren.

$h = g \circ f : X \to Z$ wobei $h(x) = g(f(x))$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- **injektiv**, wenn $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$.

- **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$.

- **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ liefert eine 1-1 Entsprechung zwischen den Elementen von X und Y , d.h. jedem Element $x \in X$ entspricht genau ein Element $y = f(x) \in Y$ und umgekehrt.

Ordnet man jedem $y \in Y$ jenes eindeutig bestimmte $x \in X$ mit $f(x) = y$ zu, erhalten wir die **Umkehrabbildung** $f^{-1} : Y \to X$ (nicht zu verwechseln mit dem Urbild!!).

Dabei gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$, wobei $id_X : X \to X$ mit $id_X(x) = x$ die **identische Abbildung auf** X bezeichnet (analog ist id_Y definiert) .

Sei $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$.

Die Abbildung $f|_A : A \to Y$ mit $f|_A(x) = f(x)$ heißt die **Einschränkung** von f auf A .

Umgekehrt ist f eine sogenannte **Fortsetzung** von $f|_A$ auf X .