03. Topologische Räume

Definition. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, τ) bestehend aus einer (nichtleeren) Menge X und einer Familie τ von Teilmengen von X mit den Eigenschaften

(TR 1) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$

(TR 2) $O_1, O_2 \in \tau \;\Rightarrow\; O_1 \cap O_2 \in \tau$

(TR 3) $O_i \in \tau \quad \forall\, i \in I \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \tau$

Die Elemente von X sind die **Punkte** des Raumes, die Elemente von τ heißen **offene Mengen** des Raumes (X, τ) , und die Familie τ heißt eine **Topologie** auf X .

Wir können also sagen:

In einer Topologie auf X sind stets $\emptyset$ und X offen, der Durchschnitt von zwei (und damit endlich vielen) offenen Mengen ist wieder offen, und die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** (bzgl. (X, τ)) , wenn $X \setminus A$ offen ist.

Bemerkung. Aus den Regeln von de Morgan folgt nun sofort: $\emptyset$ und X sind stets abgeschlossen, die Vereinigung von zwei (und damit endlich vielen) abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen, und der beliebige Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen.

Ausgehend vom Begriff der offenen Menge können nun weitere wichtige Begriffe definiert werden.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

1) $U \subseteq X$ heißt eine **Umgebung** des Punktes $x \in X$ wenn eine offene Menge $O \subseteq X$ existiert mit $x \in O \subseteq U$.

2) $U \subseteq X$ heißt eine **Umgebung** der Teilmenge $A \subseteq X$ wenn eine offene Menge $O \subseteq X$ existiert mit $A \subseteq O \subseteq U$.

3) Die Familie aller Umgebungen von $x \in X$ wird auch mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

4) Ist eine Umgebung U zusätzlich eine offene (bzw. abgeschlossene Menge), dann spricht man von einer **offenen Umgebung** (bzw. **abgeschlossenen Umgebung**).

Bemerkung. Ist (X, d) ein metrischer Raum mit zugehöriger Topologie τ_d , dann ist $U \subseteq X$ genau dann eine Umgebung von $x \in X$ wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert sodass $K(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Satz. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $G \neq \emptyset$. Dann gilt

$$G \in \tau \quad \Leftrightarrow \quad G \in \mathcal{U}(x) \ \ \forall\, x \in G$$

(D.h. eine nichtleere Teilmenge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.)

Beweis. " $\Rightarrow$ " ist trivial.

" $\Leftarrow$ " : $\forall\, x \in G \ \ \exists\, O_x \in \tau$ mit $x \in O_x \subseteq G$.

Dann ist offenbar $G = \bigcup_{x \in G} O_x$ wegen (TR 3) eine offene Menge. $\square$

Folgerung. $A \neq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn es zu jedem $x \notin A$ eine Umgebung $U_x \in \mathcal{U}(x)$ gibt mit $U_x \cap A = \emptyset$.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

1) $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von A , wenn

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \ U \cap A \neq \emptyset$$

2) Die Menge aller Berührungspunkte von A wird mit $\overline{A}$ bezeichnet und heißt die **abgeschlossene Hülle** von A .

3) $x \in X$ heißt **innerer Punkt** von A , wenn

$$\exists\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \ U \subseteq A$$

4) Die Menge aller inneren Punkte von A wird mit $\mathrm{int}A$ bezeichnet und heißt das **Innere** (bzw. der **offene Kern**) von A .

Bemerkung. Ist $O \subseteq X$ offen und $O \cap A = \emptyset$, dann ist $O \cap \overline{A} = \emptyset$.

Beweis. $\forall\, x \in O$ ist $O \in \mathcal{U}(x)$ mit $O \cap A = \emptyset$. □

Satz. $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche A umfasst.

Beweis. $A \subseteq \overline{A}$ ist trivial (jede Umgebung von $x \in A$ schneidet A zumindest in x).

Sei $x \notin \overline{A}$. Dann gibt es eine Umgebung von x und damit eine offene Menge O mit $x \in O$ und $O \cap A = \emptyset$.

Gemäß Bemerkung vorher ist dann $O \cap \overline{A} = \emptyset$. Damit ist $\overline{A}$ eine abgeschlossene Menge.

Sei nun B abgeschlossen mit $A \subseteq B$. Dann ist $X \setminus B$ offen mit $A \cap (X \setminus B) = \emptyset$. Gemäß Bemerkung vorher ist dann $\overline{A} \cap (X \setminus B) = \emptyset$, bzw. $\overline{A} \subseteq B$.

Somit ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst. □

Einfache Folgerungen. (Beweis zur Übung):

1) $A \subseteq X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

2) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, aber i.a. keine Gleichheit!

Satz. $\mathrm{int}A$ ist die größte offene Menge, die in A enhalten ist.

Beweis. $\mathrm{int}A \subseteq A$ ist trivial.

Sei $x \in \mathrm{int}A$. Dann gibt es eine Umgebung von x und damit eine offene Menge O mit $x \in O \subseteq A$.

Weil $O \in \mathcal{U}(y)\ \ \forall\, y \in O$ ist, gilt $O \subseteq \mathrm{int}A$. Damit ist $\mathrm{int}A$ eine offene

Menge.

Sei nun O offen mit $O \subseteq A$. Weil wiederum $O \in \mathcal{U}(y) \;\; \forall\, y \in O$, gilt $O \subseteq \mathrm{int}A$.

Damit ist $\mathrm{int}A$ die größte, in A enhaltene offene Menge. $\square$

Einfache Folgerungen. (Beweis zur Übung):

1) $A \subseteq X$ ist offen $\Leftrightarrow$ $A = \mathrm{int}A$

2) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mathrm{int}A \subseteq \mathrm{int}B$

3) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$

4) $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B \subseteq \mathrm{int}(A \cup B)$, aber i.a. keine Gleichheit!

Der Zusammenhang zwischen abgeschlossener Hülle und Innerem wird durch folgende Beobachtung ausgedrückt.

Satz.

1) $X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A)$

2) $X \setminus \mathrm{int}A = \overline{X \setminus A}$

Beweis.

Ad 1) : Sei $x \notin \overline{A}$. Dann existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \cap A = \emptyset$ bzw. $U \subseteq (X \setminus A)$.

Also ist $x \in \mathrm{int}(X \setminus A)$ und folglich $X \setminus \overline{A} \subseteq \mathrm{int}(X \setminus A)$.

Sei $x \in \mathrm{int}(X \setminus A)$. Dann existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subseteq (X \setminus A)$ bzw. $U \cap A = \emptyset$.

Also ist $x \notin \overline{A}$ und folglich $\mathrm{int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus \overline{A}$.

Insgesamt erhalten wir $X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A)$.

Ad 2) : Für jedes $B \subseteq X$ gilt wegen 1) dass $X \setminus \overline{B} = \mathrm{int}(X \setminus B)$.

Mit $B = X \setminus A$ ist $X \setminus \overline{X \setminus A} = \mathrm{int}(X \setminus (X \setminus A) = \mathrm{int}A$.

Daraus folgt 2) . $\square$

Beispiele für topologische Räume.

1) Auf jeder Menge X ist die Potenzmenge $\tau = \mathcal{P}(X)$ offenbar eine Topologie.

τ heißt die **diskrete Topologie** auf X und (X, τ) heißt **diskreter Raum** .

Jede Teilmenge von X ist offen und abgeschlossen zugleich, somit gilt für alle $A \subseteq X$, dass $A = \overline{A} = \mathrm{int}A$.

2) Auf einer Menge X ist $\tau = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie.

τ heißt die **indiskrete Topologie** auf X und (X, τ) heißt **indiskreter Raum** .

Für $A \neq X$ ist $\mathrm{int}A = \emptyset$, für $A \neq \emptyset$ ist $\overline{A} = X$.

Definition. Seien τ, σ Topologien auf X .

Gilt $\sigma \subseteq \tau$, dann heißt τ **feiner** als σ (bzw. σ **gröber** als τ) .

Somit ist die diskrete Topologie die feinste Topologie auf einer Menge und die indiskrete Topologie die gröbste Topologie auf einer Menge.

Des weiteren gilt:

(a) Sind τ_i , $i \in I$ Topologien auf X , dann ist $\tau = \bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$ wieder eine Topologie.

(b) Hingegen ist die Vereinigung $\tau \cup \sigma$ von zwei Topologien auf X i.a. keine Topologie (siehe später).

3) Sei X eine Menge. Dann ist

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \ : \ X \setminus O \ \text{ist endlich}\}$$

eine Topologie, die sogenannte **cofinite Topologie** auf X .

$A \subseteq X$ ist also abgeschlossen genau dann, wenn $A = X$ oder A endlich ist.

Wenn X endlich ist, dann ist τ die diskrete Topologie, wenn X unendlich ist, dann ist τ **nicht** die diskrete Topologie.

Sei nun X unendlich und O_1, O_2 nichtleere offene Mengen. Dann sind $X \setminus O_1$, $X \setminus O_2$ endlich.

Folglich ist $X \neq (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) = X \setminus (O_1 \cap O_2)$.

Also ist $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, d.h. je 2 nichtleere offene Mengen haben nichtleeren Durchschnitt.

Weiters gilt für eine unendliche Teilmenge $A \subseteq X$, dass $\overline{A} = X$.

4) Sei X eine unendliche Menge und $p \in X$.

Dann ist $\tau = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \ : \ p \in O\}$ eine Topologie auf X .

Hier ist der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen offen. Weiters ist $\{p\} \in \tau$, $\overline{\{p\}} = X$ und wenn $x \neq p$ dann ist $\{x\}$ abgeschlossen, aber nicht offen.

Für $q \neq p$ und $\sigma = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \ : \ q \in O\}$ gilt, dass $\sigma \nsubseteq \tau$ und $\tau \nsubseteq \sigma$, d.h. die beiden Topologien sind nicht vergleichbar.

5) Sei X eine unendliche Menge und $p \in X$.

Dann ist $\tau = \{X\} \cup \{O \subseteq X \ : \ p \notin O\}$ eine Topologie auf X .

Für $x \neq p$ ist $\{x\}$ offen und $\overline{\{x\}} = \{x, p\}$.

Die einzige Umgebung von p ist X .

$\{p\}$ ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Für $A \subsetneq X$ gilt $\mathrm{int} A = A \setminus \{p\}$ und $\overline{A} = A \cup \{p\}$.

6) Für einen metrischen Raum (X, d) haben wir die zugehörige Topologie mit τ_d bezeichnet (siehe vorher).

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **metrisierbar** wenn eine Metrik d auf X existiert sodass $\tau_d = \tau$.

Die diskrete Topologie auf einer Menge X ist metrisierbar mittels der diskreten Metrik, weil $K(x, \varepsilon) = \{x\}$ gilt für $0 < \varepsilon < 1$, und somit jede Teilmenge offen ist.

Auf einer unendlichen Menge sind die indiskrete Topologie und die cofinite Topologie hingegen **nicht** metrisierbar. Warum?

7) Sei $X = \mathbb{R}$.

$\tau = \{\emptyset\} \cup \{(-\infty, a) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ heißt die "left ray" Topologie.

$\sigma = \{\emptyset\} \cup \{(a, +\infty) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ heißt die "right ray" Topologie.

Für $a < b$ ist $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b) \notin \tau \cup \sigma$, also kann $\tau \cup \sigma$ keine Topologie sein.