Tutorium 27.03.2020

Heutiges Thema sind Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dabei kommen vor allem zwei Methoden zur Anwendung, nämlich der Heaviside-Kalkül und die Eigenwertmethode.

1. **Beispiel**

   Man löse mit dem Heaviside Kalkül

   $\dot{x}_1 = x_1 + 12x_2 + e^t$
   $\dot{x}_2 = 3x_1 + x_2$

   Unter Verwendung des Differentialoperators $D = \frac{d}{dt}$ ergibt sich (formal)

   $Dx_1 = x_1 + 12x_2 + e^t$
   $Dx_2 = 3x_1 + x_2 \quad \text{bzw.}$

   $(D-1)x_1 - 12x_2 = e^t$
   $3x_1 - (D-1)x_2 = 0$

   Dies können wir nun als "normales" Gleichungssystem auffassen, wobei allerdings keine Divisionen mit Ausdrücken, wo D vorkommt, erlaubt sind.
   Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 3, die zweite Gleichung mit $-(D-1)$ und addieren die beiden Gleichungen, um x_1 zu eliminieren. Dadurch erhalten wir

   $-36x_2 + (D-1)(D-1)x_2 = 3e^t \quad \text{bzw.}$

   $(D^2 - 2D + 1)x_2 - 36x_2 = 3e^t \quad \text{bzw.}$

   $(D^2 - 2D - 35)x_2 = 3e^t$

   Unter Beachtung von $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$, $D^3 = \frac{d^3}{dt^3}$ etc. ergibt sich

   $\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_2 - 35x_2 = 3e^t$

Dies ist nun eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für x_2 .

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$ liefert $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = -5$. Also ist

$x_{2,H} = C_1 e^{7t} + C_2 e^{-5t}$.

Als Ansatz für $x_{2,I}$ wählen wir $x_{2,I} = Ae^t$. Mit $\dot{x}_{2,I} = Ae^t$ und $\ddot{x}_{2,I} = Ae^t$ erhalten wir durch Einsetzen in die inhomoge Gleichung

$Ae^t - 2Ae^t - 35Ae^t = 3e^t \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{12}$ und

$x_2 = C_1 e^{7t} + C_2 e^{-5t} - \frac{1}{12} e^t$.

Wegen $\dot{x}_2 = 3x_1 + x_2$ erhalten wir

$7C_1 e^{7t} - 5C_2 e^{-5t} - \frac{1}{12} e^t = 3x_1 + C_1 e^{7t} + C_2 e^{-5t} - \frac{1}{12} e^t \quad \Rightarrow$

$x_1 = 2C_1 e^{7t} - 2C_2 e^{-5t}$

Die Lösung kann vektoriell geschrieben werden als

$$\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} e^t \end{pmatrix}$$

2. **Beispiel 26b)**

Man löse mittels Eigenwerttheorie das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tfrac{1}{3} x_1 - \tfrac{2}{3} x_2 + 3t \\ \dot{x}_2 &= -\tfrac{4}{3} x_1 - \tfrac{1}{3} x_2 + 9 \qquad , \; x_1(0) = 3 \; , \; x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Also $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ 9 \end{pmatrix}$

Die allgemeine Lösung des **homogenen** Systems hat als Fundamentalsystem die Lösungen $\vec{C}_1 e^{\lambda_1 t}$, $\vec{C}_2 e^{\lambda_2 t}$, wobei $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$ linear unabhängige Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_2 sind.

Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Da die Eigenwerte verschieden sind, erhalten wir immer linear unabhängige Eigenvektoren.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Komponenten des Störvektors sind ein Polynom 1. Grades und ein Polynom nullten Grades. Für die Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems müssen wir nun in **jeder** Komponente den in den anderen Komponenten verwendeten Ansatz mitverwenden, hier also

$$\vec{x}_I = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}_I = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die Gleichungen

$$b = \tfrac{1}{3}(a + bt) - \tfrac{2}{3}(c + dt) + 3t \quad \Rightarrow \quad 3b = a + bt - 2c - 2dt + 9t$$

$$d = -\tfrac{4}{3}(a + bt) - \tfrac{1}{3}(c + dt) + 9 \quad \Rightarrow \quad 3d = -4a - 4bt - c - dt + 27$$

Die 1. Gleichung $(a - 3b - 2c) + (b - 2d + 9)t = 0$ liefert durch Koeffizientenvergleich

(1) $\quad a - 3b - 2c = 0$
(2) $\quad b - 2d + 9 = 0$

Die 2. Gleichung $(-4a - c - 3d + 27) + (-4b - d)t = 0$ liefert durch Koeffizientenvergleich

(3) $\quad -4a - c - 3d + 27 = 0$
(4) $\quad -4b - d = 0$

Aus (4) folgt $d = -4b$, eingesetzt in (2) erhalten wir $b = -1$ und $d = 4$.

Damit verbleiben $a - 2c = -3$ und $-4a - c = -15$ mit den Lösungen $a = 3$ und $c = 3$.

Also ist die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 3-t \\ 3+4t \end{pmatrix}$$

Die Bedingungen $x_1(0) = 3$ und $x_2(0) = 0$ liefern

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + 3 \\ -C_1 + 2C_2 + 3 \end{pmatrix}$$

Also $C_1 + C_2 + 3 = 3$, $-C_1 + 2C_2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$, $C_2 = -1$

3. **Beispiel 37 des VO-Skriptums**

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_{1,2} = -1$. Der Wert -1 tritt also doppelt auf!

Das Gleichungssystem zur Bestimmung der Eigenvektoren lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \eta = 2\xi$$

Wir bekommen hier **nicht** zwei linear unabhängige Eigenvektoren!!

Ein Eigenvektor ist etwa $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, welcher die Lösung $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$ liefert.

Um eine zu $\vec{x}_1$ linear unabhängige Lösung $\vec{x}_2$ zu bestimmen, treffen wir den Ansatz

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix} e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}_2 = \begin{pmatrix} -a-bt+b \\ -c-dt+d \end{pmatrix} e^{-t}$$

Damit $$\begin{pmatrix} -a-bt+b \\ -c-dt+d \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix} e^{-t}$$

Dies liefert die beiden Gleichungen

$-a - bt + b = a + bt - c - dt$
$-c - dt + d = 4a + 4bt - 3c - 3dt$

Koeffizientenvergleich in jeder der Gleichungen liefert die vier Gleichungen

$2a - b - c = 0$
$2b - d = 0$
$4a - 2c - d = 0$
$4b - 2d = 0$

Diese System hat keine eindeutige Lösung. Eine Lösung wäre etwa mit $a = 1, b = 0, c = 2, d = 0$, aber dies würde nur $\vec{x}_1$ liefern.

Eine andere Lösung ist $a = 0, b = 1, c = -1, d = 2$, was

$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} t \\ -1 + 2t \end{pmatrix} e^{-t}$ liefert.

Damit ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ -1 + 2t \end{pmatrix} e^{-t} \quad , \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$