Parameterdarstellung von Flächen im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten eine Vektorfunktion $\vec{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mittels

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \quad , \quad (u,v) \in X \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen lassen sich u und v unter gewissen Voraussetzungen durch x und y ausdrücken. Damit erhalten wir einen Ausdruck der Form $z = z(x,y)$ (**explizite** Darstellung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$). Weitere explizite Darstellungen sind $y = y(x,z)$ bzw. $x = x(y,z)$.

Eine **implizite** Darstellung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist $F(x,y,z) = 0$.

Definition. Eine Fläche (im $\mathbb{R}^3$) in Parameterdarstellung ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$, die jedem Punkt eines Bereiches X der uv-Ebene einen Punkt $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ zuordnet.

In der Regel ist diese Zuordnung injektiv (bis auf eventuelle Ausnahmen), i.e. jedem Punkt der Fläche entspricht genau ein Paar von Parametern.

Beispiele.

1) Kugeloberfläche mit Radius R

$$x(\vartheta,\varphi) = R \sin\vartheta \cos\varphi \quad , \quad y(\vartheta,\varphi) = R \sin\vartheta \sin\varphi \quad , \quad z(\vartheta,\varphi) = R \cos\vartheta$$

Nord- und Südpol sind dabei singuläre Punkte.

2) Ebene $\vec{x}(u,v) = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$, wobei $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

3) Für $z = f(x,y)$ erhalten wir durch die Setzung $x = u$, $y = v$ eine Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} .$$

Bemerkung. Wird ein Parameter festgehalten, dann erhalten wir eine Raumkurve.

Sind also u_0, v_0 fest, dann sind $\vec{x} = \vec{x}(u, v_0)$ bzw. $\vec{x} = \vec{x}(u_0, v)$ zwei Raumkurven auf der Fläche.

Diese haben die Tangentialvektoren

$$\vec{t}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{t}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} .$$

Sind $\vec{t}_1$ und $\vec{t}_2$ linear unabhängig, dann spannen Sie eine Ebene auf, die **Tangentialebene**.

$\vec{n} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ ist der **Normalvektor** der Tangentialebene.

Bemerkung. Die singulären Punkte einer Fläche sind durch $\vec{n} = \vec{0}$ gegeben, sind also jene Punkte, in denen keine "Flächennormale" existiert.

Bemerkung. Für $z = f(x,y)$ (bzw. $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$) erhalten wir

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$\vec{n}$ hat die Länge $\|\vec{n}\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$.