

Koordinatentransformation im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

Definition. Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x(u, v)$, $y \mapsto y(u, v)$ bezeichnet man auch als eine **Koordinatentransformation** der xy -Ebene in die uv -Ebene.

Ist die Abbildung g in einem Punkt lokal umkehrbar, dann heißt dieser Punkt **regulär**, andernfalls **singulär**.

Bemerkung. Die Frage nach der lokalen Umkehrbarkeit läßt sich zumeist mittels des Satzes über die Umkehrfunktion beantworten : die Jacobi-Determinante ist im untersuchten Punkt $\neq 0$.

Beispiel. (Ebene Polarkoordinaten)

Betrachte $x = x(r, \varphi) = r \cos \varphi$, $y = y(r, \varphi) = r \sin \varphi$, wobei $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Jeder Punkt der xy -Ebene wird durch einen Punkt des Bereiches für r und φ repräsentiert.

Für die Jacobi-Determinante gilt
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Damit ist $r = 0$ ein singulärer Punkt (besitzt keinen eindeutig definierten Winkel). Alle anderen Punkte des $r\varphi$ -Bereiches sind regulär.

Die Umkehrfunktion läßt sich im Falle $x \neq 0$ mittels

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{beschreiben.}$$

Aufgabe. Man zeige, dass durch $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = \frac{v}{u}$ der erste Quadrant der xy -Ebene in den ersten Quadranten der uv -Ebene abgebildet wird.

Wichtige Koordinatentransformationen im \mathbb{R}^3 :

Zylinderkoordinaten

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, z , wobei $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Für die Jacobi-Determinante gilt

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r .$$

Somit besteht die z -Achse aus singulären Punkten.

Die Umkehrung ist durch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$, $z = z$ gegeben.

Kugelkoordinaten

$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$ wobei

$r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Beachte, dass $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Der Winkel ϑ wird von der positiven z -Achse weg gemessen.

Für die Jacobi-Determinante erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \dots = r^2 \sin \vartheta$$

$r = 0$ (der Ursprung) ist ein singulärer Punkt, $\sin \vartheta = 0$ wenn $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$. Damit sind alle Punkte der z -Achse singuläre Punkte (sie besitzen keinen eindeutig bestimmten Winkel φ).

Als **Koordinatenlinien** erhalten wir

r , φ konstant , ϑ beliebig : Meridiane (Längengrade)

r , ϑ konstant , φ beliebig : Breitenkreise

ϑ , φ konstant , r beliebig : Strahlen

Als **Koordinatenflächen** erhalten wir

r konstant, ϑ, φ beliebig : Kugelflächen

φ konstant, r, ϑ beliebig : Halbebenen durch z -Achse

ϑ konstant, r, φ beliebig : Kegel