Differenziation von Vektoren

Im Zuge der Behandlung der Grundlagen der Vektoranalysis werden wir - wenn nicht anders erwähnt - ausschließlich Vektoren im $\mathbb{R}^3$ betrachten.

Von besonderer Bedeutung sind dabei Abbildungen

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ sowie Abbildungen

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} .$$

Der erste Fall kann als Definition einer **Raumkurve** aufgefaßt werden (wobei der Parameter t sehr oft die Zeit darstellt), während man im zweiten Fall von einem **Vektorfeld** spricht.

Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ werden auch als **Skalarfelder** bezeichnet.

Ein Beispiel für ein Vektorfeld wäre etwa das momentane Geschwindigkeitsfeld der Teilchen einer Strömung, ein Beispiel für ein Skalarfeld die momentane Temperaturverteilung in einem räumlichen Bereich.

Unter Verwendung der kanonischen Basisvektoren $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ im $\mathbb{R}^3$ kann eine Raumkurve bzw. ein Vektorfeld offenbar auch in der Form

$$\vec{x}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + x_3(t)\vec{e}_3 \qquad \text{bzw.}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = F_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3$$

geschrieben werden.

Die Differenziation von Vektoren kann nun **komponentenweise** definiert werden.

$$\tfrac{d}{dt}\vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = (\tfrac{d}{dt}x_1(t), \tfrac{d}{dt}x_2(t), \tfrac{d}{dt}x_3(t)) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)) =$$

$$= \dot{x}_1(t)\vec{e}_1 + \dot{x}_2(t)\vec{e}_2 + \dot{x}_3(t)\vec{e}_3$$

$\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_3}{\partial x_1}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\vec{e}_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\vec{e}_3$

Ein klassisches Beispiel in diesem Zusammenhang ist die Bestimmung von Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens.

Beschreibt $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ den Ort eines Teilchens bzgl. der Zeit t , dann ist durch

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$ die Geschwindigkeit, und durch

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))$ die Beschleunigung gegeben.

Wichtige Rechenregeln.

(a) Sei $c(t)$ eine Skalarfunktion und $\vec{A}(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t))$.

Dann ist $c(t)\vec{A}(t) = (c(t)A_1(t), c(t)A_2(t), c(t)A_3(t))$. Weil

$\frac{d}{dt}(c(t)A_i(t)) = \dot{c}(t)A_i(t) + c(t)\dot{A}_i(t)$ gilt offenbar

$$\frac{d}{dt}(c(t)\vec{A}(t)) = \dot{c}(t)\vec{A}(t) + c(t)\dot{\vec{A}}(t) \ .$$

(b) Seien $\vec{A}(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t))$ und $\vec{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))$.

Dann ist $\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t) = A_1(t)B_1(t) + A_2(t)B_2(t) + A_3(t)B_3(t)$ und

$\frac{d}{dt}(\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t)) = \dot{A}_1(t)B_1(t) + A_1(t)\dot{B}_1(t) + \dot{A}_2(t)B_2(t) + A_2(t)\dot{B}_2(t) +$

$+\dot{A}_3(t)B_3(t) + A_3(t)\dot{B}_3(t) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \cdot \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$.

Also $\frac{d}{dt}(\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t)) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \cdot \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$.

Folgerung. Sei $\vec{A}(t)$ ein Vektor **konstanter** Länge.

Dann ist $\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t) = c \ldots$ const. Damit ist $2\dot{\vec{A}}(t) \cdot \vec{A}(t) = 0$, i.e.

$\dot{\vec{A}}(t) \perp \vec{A}(t)$ ($\dot{\vec{A}}(t)$ und $\vec{A}(t)$ stehen senkrecht aufeinander).

Beispiel. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes mit konstanter

Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ auf einer Kreisbahn (wobei der Mittelpunkt im Ursprung liegt).

Wegen $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 \ldots$ const. ist $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$.

Wegen $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 \ldots$ const. ist $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$.

Mit $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ folgt, dass $\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \vec{a} = 0$ bzw. $\vec{r} \cdot \vec{a} = -v^2$.

Weil $\vec{r} \perp \vec{v}$ und $\vec{v} \perp \vec{a}$ muß $\vec{r} = \lambda \vec{a}$ sein.

Wegen $-v^2 = \vec{r} \cdot \vec{a} = \lambda a^2$ gilt $\lambda < 0$.

Aus $\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{r}||\vec{a}| \cos\alpha$ folgt $\lambda a^2 = |\lambda| a^2 \cos\alpha$, und damit ist $\cos\alpha = -1$, i.e. $\alpha = \pi$.

Wegen $|\vec{r}||\vec{a}| = v^2$ gilt schließlich $a = \frac{v^2}{r}$.