Der Gaußsche Integralsatz

Beim Oberflächenintegral $\iint\limits_{O} \vec{F} \cdot \vec{n}\; dA$ beschreibt der Integrand den senkrechten Durchsatz des Vektorfeldes durch das Flächenelement dA . Insgesamt liefert das Integral über eine **geschlossene** Fläche den Nettodurchsatz von $\vec{F}$ durch das von der Fläche umschlossene Volumen.

Bei der Behandlung der Divergenz betrachteten wir einen kleinen Quader um einen Punkt P und zeigten, dass $\nabla \cdot \vec{F}$ "ungefähr" den Nettodurchfluss von $\vec{F}$ durch den Volumsbereich beschreibt.

Fügt man nun an einer Seitenfläche des einen Quaders einen zweiten Quader hinzu, so trägt der Fluss durch die Berührungsfläche der beiden Quader nichts bei, da er ja beim einen Quader positiv ist und beim anderen negativ und sich daher aufhebt. Also sind nur die Außenflächen wichtig.

Denkt man sich ein (endliches) Volumen V als aus "vielen kleinen Quadern" aufgebaut vor, erscheint die folgende wichtige Aussage zumindest plausibel.

Satz. (**Gaußscher Integralsatz**)

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F}\; dV = \int_{S=\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\; dA$$

Dabei ist $\vec{F}$ ein Vektorfeld und $S = \partial V$ bezeichnet den Rand von V , die Fläche, welche V umschließt.

Genauer gesagt müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein.

(a) Die Fläche S muß **stückweise glatt** sein (wie etwa die Begrenzungsfläche eines Quaders), d.h. sie setzt sich aus endlich vielen Flächenstücken zusammen, welche stetig partiell differenzierbare Parameterdarstellungen besitzen. Dies bedeutet, dass auf diesen Flächenstücken ein Normalenvektor $\vec{n}$ existiert, der so gewählt wird, dass er nach außen zeigt, also weg vom umschlossenen Bereich.

(b) Das Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ ist in V und auf S definiert und stetig differenzierbar. Punkte, wo das nicht gilt, müssen durch geeignete "Loch-Definition" (siehe anschließendes Beispiel) ausgeschlossen werden.

(c) Falls es im umschlossenen Gebiet "Löcher" gibt, müssen diese bei der Bestimmung des Randes mitberücksichtigt werden.

Beispiel. Betrachte für $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ das Feld $\vec{F} = \vec{r}$.

Dann ist $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 3$ und folglich

$\int_S \vec{r} \cdot \vec{n}\, dA = \int_V \nabla \cdot \vec{r}\, dV = 3 \int_V dV = 3V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \int_S \vec{r} \cdot d\vec{A}$

Für eine Kugelfläche mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R erhalten wir $\vec{r} \cdot \vec{n} = R$ und

$$\int_S \vec{r} \cdot \vec{n} dA = R \int_S dA = R \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 4R^3\pi \quad \text{, also}$$

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi \ .$$

Beispiel. Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\vec{e}_r}{r^2}$ für $r \neq 0$ (Feld einer elektrischen Punktladung im Ursprung mit Ladungsstärke q).

Mit der früheren Formel $\nabla \cdot (\psi \vec{e}_{u_1}) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \frac{\partial}{\partial u_1} (\psi h_{u_2} h_{u_3})$ und

$h_{u_1} = h_r = 1$, $h_{u_2} = h_\theta = r$, $h_{u_3} = h_\varphi = r \sin\vartheta$ bei Kugelkoordinaten

gilt $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q}{r^2} r^2 \sin\vartheta \right) = 0$ für $r \neq 0$.

Damit ist auch $\int_V \nabla \cdot \vec{E}\, dV = 0$.

Berechnen wir nun das Oberflächenintegral über eine Kugelfläche S , die den Ursprung erhält, dann ist $\vec{n} = \vec{e}_r$, also $\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{q}{r^2}$ und das Flächenelement ist $dA = r^2 \sin\vartheta\ d\vartheta d\varphi$.

Folglich ist $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \int_S \frac{q}{r^2} r^2 \sin\vartheta\ d\vartheta d\varphi = 4\pi q$.

Die Nichtgültigkeit des Gaußschen Satzes rührt daher, dass durch die Annahme einer punktförmigen Ladung im Ursprung eine Singularität vorliegt. Diese kann allerdings durch die "richtige" Berücksichtigung der Punktladung beseitigt werden.

Ersetzen wir die Punktladung durch eine kleine, homogen geladene Kugel $\widetilde{V}$ vom Radius R, deren Gesamtladung q sei. Dann herrscht außerhalb dieser Kugel weiterhin das Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2}\vec{e}_r$.

Innerhalb der Kugel hat das elektrische Feld hingegen die Form
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{qr}{R^3}\vec{e}_r$.

Dort gilt $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{qr}{R^3}r^2 \sin\vartheta\right) = \frac{3q}{R^3}$ und somit ist

$$\int_{\widetilde{V}} \nabla \cdot \vec{E}\; dV = \frac{3q}{R^3}\int_{\widetilde{V}} dV = 4\pi q \ .$$

Außerhalb der geladenen Kugel liefert das Volumsintegral keinen Beitrag, und damit ist das Volumsintegral über ein beliebiges, die geladene Kugel enthaltendes Volumen stets $4\pi q$. Dies ist genau der frühere Wert des Oberflächenintegrals.

Bemerkung. Eine elegante Möglichkeit, Punktladungen zu behandeln, ist durch die Verwendung der Diracschen Deltafunktion möglich.

Folgerung. Für ein Skalarfeld Φ und ein Vektorfeld $\vec{F}$ gelten

(1) $\int_V \nabla\Phi(x_1, x_2, x_3)\; dV = \int_{S(V)} \Phi(x_1, x_2, x_3)\vec{n}\; dA$

(2) $\int_V \nabla \times \vec{F}(x_1, x_2, x_3)\; dV = \int_{S(V)} \vec{n} \times \vec{F}(x_1, x_2, x_3)\; dA$

Beweis.

zu (1): Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ ein beliebiger konstanter Vektor. Wegen $\nabla \cdot (\vec{a}\Phi) = \vec{a} \cdot \nabla\Phi$ erhalten wir

$$\vec{a} \cdot \int_V \nabla\Phi\; dV = \int_V \nabla \cdot (\vec{a}\Phi)\; dV = \int_{S(V)} (\vec{a}\Phi) \cdot \vec{n}\; dA = \vec{a} \cdot \int_{S(V)} \Phi\vec{n}\; dA$$

Folglich ist $\vec{a} \cdot \left[\int_V \nabla\Phi\; dV - \int_{S(V)} \Phi\vec{n}\; dA\right] = 0$.

Weil $\vec{a}$ beliebig ist, gilt damit (1) .

zu (2): Sei wiederum $\vec{a} \neq \vec{0}$ beliebig und konstant. Mit

$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{F})$ und $\vec{n} \cdot (\vec{F} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{n} \times \vec{F})$ gilt dann

$$\vec{a} \cdot \int_V (\nabla \times \vec{F})\; dV = \int_V \nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{a})\; dV =$$

$= \int_{S(V)} \vec{n} \cdot (\vec{F} \times \vec{a})\, dA = \vec{a} \cdot \int_{S(V)} (\vec{n} \times \vec{F})\, dA$ und weiters

$$\vec{a} \cdot \left[\int_V (\nabla \times \vec{F})\, dV - \int_{S(V)} (\vec{n} \times \vec{F})\, dA \right] = 0$$

Daraus folgt (2) . $\square$

Beispiel. Betrachte $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ und das von den Flächen

$\vec{r} = (x_1, \sqrt{16 - x_1^2}, x_3)$, $x_3 = 0$, $x_3 = 5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

begrenzte Volumen (ist das Viertel eines Zylinders).

Mit $\nabla\Phi = (x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2)$ und Einführung von Zylinderkoordinaten erhalten wir

$$\int_V \nabla\Phi dV = \int\limits_{x_3=0}^{5} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} \int\limits_{\rho=0}^{4} \rho \begin{pmatrix} x_3 \rho \sin\varphi \\ x_3 \rho \cos\varphi \\ \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \end{pmatrix} d\rho d\varphi dx_3 = \begin{pmatrix} 800/3 \\ 800/3 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir $\int_{S(V)} \Phi \vec{n}\, dA$.

Auf den Flächen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ verschwindet Φ und damit auch das Integral.

Auf der Viertelkreisfläche $x_3 = 5$ ist $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Mittels Zylinderkoordinaten gilt

$$\int_{S(V)} 5 x_1 x_2 \vec{n}\, dA = \int\limits_{\rho=0}^{4} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} 5\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rho d\varphi d\rho = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Auf $x_1^2 + x_2^2 = 16$ ist $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Ferner ist

Ferner ist $dA = 4 d\varphi dx_3$ und $\Phi = 16 x_3 \sin\varphi \cos\varphi$. Damit ist

$$\int\limits_{x_3=0}^{5} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} 16 x_3 \sin\varphi \cos\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} 4 d\varphi dx_3 =$$

$$= \int\limits_{x_3=0}^{5} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} 64 x_3 \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos^2\varphi \\ \sin^2\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dx_3 = \begin{pmatrix} 800/3 \\ 800/3 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad \square$$

Nun betrachten wir (zumindest) zweimal differenzierbare Funktionen u, v und die Identitäten

$$\nabla \cdot (u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\triangle v \quad , \quad \nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\triangle u$$

Differenzbildung ergibt $u\triangle v - v\triangle u = \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u)$.

Mit $\vec{F} = u\nabla v - v\nabla u$ erhalten wir mit Hilfe des Gaußschen Satzes den sogenannten **Integralsatz von Green** :

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int_{S(V)} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \vec{n}\, dA$$