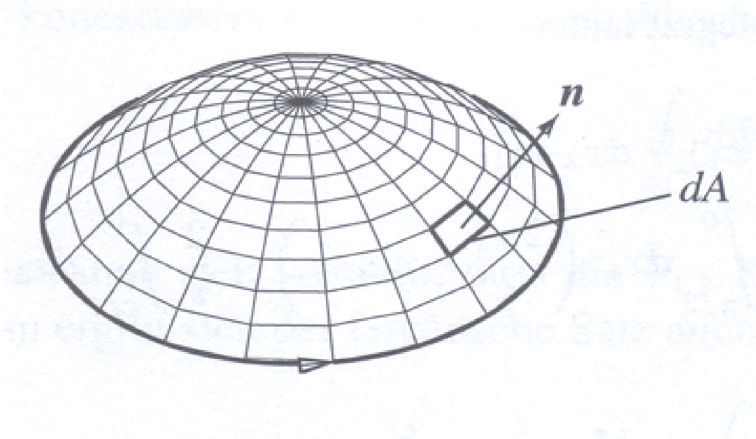
Der Integralsatz von Stokes

Die Begriffe "außen" und "innen" bei Volumsbereichen sowie "oben" und "unten" bei Flächen beruhen offenbar auf Konvention. Die sogenannte **Orientierbarkeit** einer Fläche bedeutet, dass die Fläche "zwei Seiten" hat. Das bekannte Möbius-Band ist etwa eine Fläche, die nur eine Seite besitzt (man erkennt das daran, wenn man die Fläche, ausgehend von einem beliegiben Punkt einfärbt). Mathematisch betrachtet läßt sich die Orientierbarkeit so fassen, dass ein **stetiges** Einheitsnormalenvektorfeld existiert.

Im folgenden befassen wir uns mit orientierbaren, berandeten Flächen und wollen für diese die Begriffe "oben" und "unten" festlegen.
Wenn man den Rand der Fläche **entgegen** dem Uhrzeigersinn durchläuft, so ist die Richtung "oben" im Sinne einer Rechtsschraube definiert.



Der folgende Integralsatz von Stokes verknüpft ein Oberflächenintegral über eine (gekrümmte) Fläche mit einem Kurvenintegral über den Rand der Fläche.

Satz. (**Integralsatz von Stokes**)

Sei $\vec{F}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\; dA = \int_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(Dabei ist $\vec{n}$ so gewählt, dass er nach oben zeigt.)

Beweis. (für den Fall, dass die Fläche S durch $x_3 = f(x_1, x_2)$ bzw.

$x_3 - f(x_1, x_2) = 0$ gegeben ist)

$\vec{n}\ dA = (\vec{r}_{x_1} \times \vec{r}_{x_2})\ dx_1 dx_2 = (-f_{x_1}, -f_{x_2}, 1)\ dx_1 dx_2$ und weiters

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\ dA =$$
$$= \left[-\frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \right] dx_1 dx_2$$

Entlang der Kurve C ist

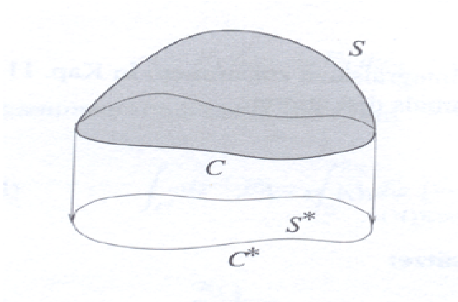
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3]$$

Weil C auf der Fläche S liegt, gilt $dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$ und damit

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_2 \right]$$

Es sei nun die Kurve C^* die Projektion der Kurve C in die $x_1 x_2$-Ebene (die von C durchlaufenen Werte von x_1 und x_2 sind dieselben wie bei C^*) und wir setzen

$$V_1(x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + F_3(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$
$$V_2(x_1, x_2) = F_2(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + F_3(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$



Damit ist

$$\int_C \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_2 \right] =$$
$$= \int_{C^*} [V_1(x_1, x_2) dx_1 + V_2(x_1, x_2) dx_2]$$

Nun können wir den Greenschen Satz in der Ebene anwenden und dieses Integral schreiben als

$\int_{S^*} \left[\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2$, wobei S^* die Projektion der Fläche S auf den Bereich innerhalb von C^* ist. Nun ist

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + F_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$-\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} - F_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Damit wird der Integrand zu

$$\left[-\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\right] dx_1 dx_2$$

Beachten wir darüberhinaus, dass durch $x_3 = f(x_1, x_2)$ weiterhin die Werte von $\vec{F}$ auf der Fläche in die Integration eingehen, ist der Beweis dadurch abgeschlossen. $\square$

Beispiel. Betrachte das Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (3x_2, -x_1x_3, x_2x_3^2)$ sowie die Fläche $x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, die durch die Ebene $x_3 = 2$ begrenzt wird.

Die Randkurve C ist durch $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeben. Damit ist

$$\int_C \vec{F} \cdot \, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)dt = \int_0^{2\pi} (-12\sin^2 t - 8\cos^2 t)dt = -20\pi$$

Nun bestimmen wir das Flächenintegral. "Oben" ist bei diesem Umlaufsinn von C die Innenseite der Schale, wo der Normalenvektor in die positive x_3-Richtung weist.

$$\nabla \times \vec{F} = (x_1 + x_3^2, 0, -3 - x_3)$$

$$\vec{n}dA = (\vec{r}_{x_1} \times \vec{r}_{x_2})dx_1dx_2 = (-x_1, -x_2, 1)dx_1dx_2$$

(Dieses $\vec{n}$ weist tatsächlich in die richtige Richtung)

Also ist $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \; dA = (-x_1^2 - x_1x_3^2 - 3 - x_3)dx_1dx_2$

Für die konkrete Berechnung des Oberflächenintegrals verwenden wir Zylinderkoordinaten, $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$, $x_3 = x_3$.

Die Fläche hat dann die Form $x_3 = \rho^2/2$ und für das Integral erhalten wir

$$\int\limits_{\rho=0}^{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(-\frac{\rho^4}{4}\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi - \frac{\rho^2}{2} - 3\right)\rho d\varphi d\rho = -20\pi$$

Bemerkung. Auch hier kann durch eine Singularität die Gültigkeit des Satzes nicht gegeben sein.

Betrachtet man etwa das in Zylinderkoordinaten gegebene Feld $\vec{F} = \vec{e}_\varphi/\rho$, dann ist

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_{x_3} \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_{x_3} \\ 0 & \rho\frac{1}{\rho} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(Das Feld $\vec{F}$ entspricht dem Magnetfeld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters)

Ein Flächenintegral über eine Fläche S senkrecht zum Draht wird also verschwinden.

Das Linienintegral hingegen ergibt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \rho F_\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \ .$$

Wiederum kann dieser Widerspruch durch eine geeignete Behandlung der Singularität aufgelöst werden.