Der ϵ-Tensor

Der ϵ-**Tensor** im $\mathbb{R}^n$ ist ein Tensor mit den Werten $-1, 0, +1$, der antisymmetrisch bei paarweiser Vertauschung von zwei Indizes ist (also das Vorzeichen ändert).

Im $\mathbb{R}^3$ besitzt er die Darstellung

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (\mathrm{i,j,k}) \text{ ist gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & (\mathrm{i,j,k}) \text{ ist ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst, i.e. zwei Indizes sind gleich} \end{cases}$$

(Dabei heißt eine Permutation $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ von n Elementen **gerade** (bzw. **ungerade**), wenn sie durch eine gerade (bzw. ungerade) Anzahl von paarweisen Indexvertauschungen in die natürliche Permutation $(1, 2, \ldots, n)$ übergeführt werden kann)

Da es $3! = 6$ Permutationen von 3 Elementen gibt, hat der ϵ-Tensor im $\mathbb{R}^3$ sechs nichtverschwindende Elemente

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \ , \ \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$$

Wie man durch leicht verifiziert, kann man den ϵ-Tensor auch als Determinante schreiben

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe des ϵ-Tensors können verschiedene Vektoroperationen, wie etwa das Vektorprodukt oder die Rotation, dargestellt werden.

Das Vektorprodukt $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ von zwei Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ist bekanntlich

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2$$

$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{231} a_3 b_1$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1$$

Zusammengefasst kann dies als

$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ (Summenkonvention !) geschrieben werden.

(Man sieht auch, dass diese Größe durch zweifache Verjüngung des Tensors 5. Stufe $\epsilon_{ijk} a_n b_m$ entsteht.)

Der Rotor kann analog gebildet werden.

$\mathbf{c} = \text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$ entspricht $c_i = \epsilon_{ijk} \partial_j a_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$,

wobei die Schreibweise $\partial_j a_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$ verwendet wurde.

Betrachten wir nun den Ausdruck $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (d_1, d_2, d_3)$. Dann ist

$$d_i = \epsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \epsilon_{ijk} a_j (\epsilon_{klm} b_l c_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m \ .$$

Der Ausdruck $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}$ entsteht durch Verjüngung des direkten Produktes zweier ϵ-Tensoren.

Wir schreiben zuerst das Produkt von zwei ϵ-Tensoren mit Hilfe der Determinantendarstellung an.

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{vmatrix}$$

In der ersten Determinante vertauschen wir Zeilen und Spalten (Wert der Determinante ändert sich dabei nicht) und verwenden weiters den Determinantenproduktsatz $\det\mathbf{A} \det\mathbf{B} = \det\mathbf{AB}$.

$$\begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Dabei verwendeten wir, dass $\delta_{1i}\delta_{1l} + \delta_{2i}\delta_{2l} + \delta_{3i}\delta_{3l} = \delta_{ki}\delta_{kl} = \delta_{il}$.

Wird nun mit $n = k$ verjüngt, erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}$$

Somit gilt für $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (d_1, d_2, d_3)$, dass

$$d_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}a_j b_l c_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_j b_l c_m =$$
$$= \delta_{il}a_m b_l c_m - \delta_{im}a_j b_j c_m = b_i(a_m c_m) - c_i(a_j b_j)$$

Daraus folgt sofort, dass $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Bemerkung. Wegen der Invarianz bezüglich der zyklischen Vertauschung der Indizes erhalten wir

$$\epsilon_{ijk}a_i b_j c_k = \epsilon_{jki}b_j c_k a_i = \epsilon_{kij}c_k a_i b_j \quad \Rightarrow$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Bemerkung. Bei der Verwendung der Summenkonvention muß man auch aufpassen. So ist etwa

$$\delta_{ii} = 3 \quad , \quad \delta_{ii}\delta_{kk} = 9 \quad , \quad \delta_{ik}\delta_{ik} = \delta_{ii} = 3$$

Weitere Beziehungen.

(i) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ (siehe vorher)

(ii) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$

Beweis. $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k}$.

Ist nun $i = k = 1$ dann ist $\delta_{ij}\delta_{jk} = 1 = \delta_{ik}$.
Analog für $i = k = 2$ und $i = k = 3$.

Ist $1 = i \neq k$, dann ist $\delta_{1k} = 0$ und somit $\delta_{ij}\delta_{jk} = 0 = \delta_{ik}$.
Analog für $2 = i \neq k$ und $3 = i \neq k$.

(iii) Verjüngung von (i) liefert

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}$$

(iv) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

Bemerkung. Sei ϵ_{ijk} ein ϵ-Tensor und t_{lm} ein symmetrischer Tensor.

Zweimalige Verjüngung von $\epsilon_{ijk} t_{lm}$ liefert

$$\epsilon_{ijk} t_{jk} = -\epsilon_{ikj} t_{jk} = -\epsilon_{ikj} t_{kj} = -\epsilon_{ijk} t_{jk}$$

Zum Schluß wurden die Indizes $k \leftrightarrow j$ umbenannt. Daraus folgt dass

$$\epsilon_{ijk} t_{jk} = 0 \ .$$

Analog gilt für einen in den Indizes i, j symmetrischen Tensor $t_{ij\ldots}$ dass

$$\epsilon_{ijk} t_{ij\ldots} = 0 \ .$$