Vektoranalysis – Sommersemester 2010

Blatt 3: Integrationstechniken, Bogenlänge von Kurven, uneigentliche Integrale

Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Substitutionsmethode:** Bestimmen Sie das Integral
$$\int \mathrm{e}^{\cos x} \sin x \, \mathrm{d}x$$
mit Hilfe der Substitution $u = \cos x$.

2. **Komplexe Integranden:** Bestimmen Sie das Integral
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \, \mathrm{d}x \, .$$

3. **Uneigentliche Integrale:** Prüfen Sie nach, für welche Werte von α die folgenden Grenzwerte jeweils existieren:
$$G_1(\alpha) = \lim_{A \to 0} \int_A^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \, , \qquad G_2(\alpha) = \lim_{B \to \infty} \int_1^B \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

4. **Abschätzungen:** Bestimmen Sie Konstanten $C_i > 0$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ so, dass
$$\begin{aligned} C_1 x^{\alpha_1} &\leq \sqrt{x}(1+x) \leq C_2 x^{\alpha_2} && \text{für } x \in (0,1), \\ C_3 x^{\alpha_3} &\leq \sqrt{x}(1+x) \leq C_4 x^{\alpha_4} && \text{für } x \in (1,\infty) \end{aligned}$$
gilt. Welche Abschätzungen lassen sich für $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ angeben?

Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefällen schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen[1], so werden Ihnen 2^n Kreuze aberkannt, wobei n die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht nicht präsentiert werden konnten.

[1] Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.

1. **Elementare Integration:** Bestimmen Sie zumindest zwei der folgenden Integrale:

$$I_1 = \int \mathrm{e}^{\cos x}\ \sin^3 x \,\mathrm{d}x$$
$$I_2 = \int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$$
$$I_3 = \int \frac{\mathrm{e}^x\ \sinh x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$$

2. **Integration auf Umwegen:** Bestimmen Sie das Integral

$$J = \int \mathrm{e}^{3x}\ \cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

   (a) durch partielle Integration,

   (b) durch Betrachtung des komplexwertigen Integrals $\int \mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x$

3. **Bogenlänge von Graphen:**

   (a) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \cosh^2 u \,\mathrm{d}u$$

   (i) mittels partieller Integration,

   (ii) mittels Zerlegung des Integranden in Exponentialfunktionen.

   (b) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Graphen von $f(x) = x^2$ im Bereich $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4. **Existenz von uneigentlichen Integralen:** Überprüfen Sie jeweils durch eine geeignete Abschätzung und den Vergleich mit einem Integral der Art $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ mindestens drei der folgenden uneigentlichen Integrale auf Existenz:

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$$
$$J_2 = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$$
$$J_3 = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4} + 1}$$
$$J_4 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)}$$

5. **Existenz von uneigentlichen Integralen:** Zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das uneigentliche Integral

$$\Gamma(n) := \int_0^\infty t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

existiert und bestimmen Sie seinen Wert.
[Hinweis: Leiten Sie eine Rekursionsbeziehung zwischen $\Gamma(n)$ und $\Gamma(n-1)$ her.]