Vektoranalysis – Sommersemester 2010

Blatt 5:Mehrdimensionale Integralrechnung

Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Bereiche:** Beschreiben Sie den Bereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ in Polarkoordinaten.

2. **Bereiche:** Beschreiben Sie den Bereich, welcher begrenzt wird durch die Flächen $x^2+y^2 = 4z$ und $z = 4$, in Zylinderkoordinaten.

3. **Volumen von Körpern:** Beschreiben Sie das Volumen des Kegels $x^2+y^2-z^2 = 0$ für $z \in [0, 1]$ mittels Mehrfachintegrale in kartesischen Koordinaten sowie in Zylinderkoordinaten.

4. **Volumen von Körpern:** Beschreiben Sie das Volumen einer Kugel von Radius 1 mittels Mehrfachintegrale in kartesischen Koordinaten sowie in Kugelkoordinaten.

Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefälle schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen[1], so werden Ihnen 2^n Kreuze aberkannt, wobei n die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht nicht präsentiert werden konnten.

1. **Doppelintegrale:** Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B f(x, y)dxdy$$

mit

a) $f(x, y) = x\sin(y) - ye^x$, $B = [-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

b) $f(x, y) = \sqrt{|y - x^2|}$, $B = [-1, 1] \times [0, 2]$,

c) $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2$ und B ist die Fläche im ersten Quadranten die begrenzt wird von den Kurven $y = 2 - x^2 + x$, $x = 0$, $y = 0$.

[1] Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.

2. **Dreifachintegrale:** Man berechne das Integral

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz$$

mit

a) $f(x,y,z) = 1 - z^2$, und B ist die Pyramide mit den Eckpunkten $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,0)$, $E(0,0,1)$,

b) $f(x,y,z) = x$, und B wird durch die Flächen $x^2 + y^2 = 2z$ und $z = 2$ begrenzt.

3. **Oberfläche und Volumen von Schnittkörpern:** Bestimmen Sie das Volumen sowie die Oberfläche des Körpers $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,, x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, z \geq 0\}$ mittels Integralrechnung.

4. **Mehrfachintegrale mit Koordinatentransformation:** Berechnen Sie die Integrale

a)

$$\iiint_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ wobei } B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

b)

$$\iiint_B z e^{x^2+y^2} dxdydz, \text{ wobei } B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, x^2 + y^2 \leq 4\,,\ 2 \leq z \leq 3\}.$$

5. **Anwendung des Mittelwertsatzes:** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein stetige Funktion und $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Radius ε um dem Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0). Beweisen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \iiint_{B_\varepsilon} f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0), \text{ wobei } |B_\varepsilon| \text{ das Volumen von } B_\varepsilon \text{ ist.}$$