Vektoranalysis – Sommersemester 2010
Blatt 6: Integrale, Differenziation von Vektoren, Gradient, Divergenz und Rotor

Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Transformationsformel:** Wie sieht das Flächenelement dA und das Volumselement dV in allgemeinen Koordinaten $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ aus?

2. **Differenziation von Vektoren:** Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$ eines Teilchens, dass sich auf folgender Bahnkurve bewegt: $x = e^{-t}, \quad y = 2\cos(3t), \quad z = 2\sin(3t)$.

3. **Divergenz und Rotor:** Bestimmen Sie für $\vec{F} = (x^2y, 2yz, x+z)^T$:

   a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ **b)** $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

   Was versteht man unter einem konservativen Kraftfeld?

Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefällen schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen[1], so werden Ihnen 2^n Kreuze aberkannt, wobei n die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht nicht präsentiert werden konnten.

1. **Dreifachintegrale und Transformationsformel:** Bestimmen Sie das Volumen jenes Bereichs, der von einem Ellipsoiden und von einem Kegel berandet wird und in $z \geq 0$ liegt.

$$\begin{aligned} \text{Ellipsoid:} \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ \text{Kegel:} \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \end{aligned}$$

   Der Übergang zu elliptischen Zylinderkoordinaten könnte hilfreich sein:

$$x = \rho\, a\, \cos(\phi), \qquad y = \rho\, b\, \sin(\phi), \qquad z = z.$$

[1] Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.

2. **Differenzíation von Vektoren:** Wenn $\vec{A} = 5t^2\hat{e}_1 + t\hat{e}_2 - t^3\hat{e}_3$ und $\vec{B} = \sin(t)\hat{e}_1 - \cos(t)\hat{e}_2$ gegeben sind, bestimmen Sie folgende Ableitungen:

   a) $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$ **b)** $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ **c)** $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)$

3. **Linienintegrale:**

   a) Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\hat{e}_1 - 14yz\hat{e}_2 + 20xz^2\hat{e}_3$ das Integral

   $$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

   vom Ursprung $(0,0,0)$ zum Punkt $(1,1,1)$ entlang zweier Wege:

   i. $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

   ii. Entlang der Kanten eines Einheitswürfels: Von $(0,0,0)$ nach $(1,0,0)$, weiter zu $(1,1,0)$ und dann zu $(1,1,1)$.

   b) Ein Kraftfeld sei über ein Potential ϕ bestimmt: $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$, ϕ sei eindeutig und besitze stetige Ableitungen. Zeigen Sie, dass die Arbeit, um ein Teilchen in diesem Feld vom Punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ zu einem anderen Punkt $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ zu bewegen, unabhängig vom Weg ist, der die beiden Punkte verbindet.

   c) Warum ist das in Aufgabe a) nicht der Fall?

4. **Gradient, Divergenz und Rotor:**

   a) Das Temperaturfeld eines Körpers werde durch die Funktion $\phi = x^2yz + 4xz^2$ beschrieben. Nimmt die Temperatur am Punkt $(1,-2,-1)$ in Richtung $2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$ zu oder ab? Begründen Sie die Rechnung!

   b) Zeigen Sie explizit, dass $\phi_1 = \frac{1}{r}$ und $\phi_2 = \frac{\vec{r}}{r^3}$ Lösungen der *Laplace-Gleichung* sind:

   $$\vec{\nabla}^2\phi_i = \Delta\phi_i = 0, \qquad i = 1,2.$$

   c) Es gelten folgende Gleichungen für den Zusammenhang des elektrischen Feldes $\vec{E}$ mit dem Magnetfeld $\vec{H}$:

   $$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

   Zeigen Sie, dass $\vec{E}$ und $\vec{H}$ jeweils die Wellengleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ erfüllen. Können Sie die oberen vier Gleichungen physikalisch interpretieren?